МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

КІНЕМАТИКА

Конспект лекцій

(для студентів 1 і 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 «Охорона праці»)

ХАРКІВ
ХНАМГ
2012

УДК 351.1

Шпачук В. П. Теоретична механіка. Кінематика: конспект лекцій *(для студентів 1 і 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 «Охорона праці»)* / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 65 с.

Автори: *В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз*

Рецензенти:

О. К. Морачковський, проф., д-р техн. наук, завідувач кафедри теоретичної механіки (Харківський національний технічний університет «ХПІ»);

М. Ф. Пацегон, проф., д-р ф.-м. наук (Харківський національний університет ім. В. М. Каразіна).

Цей конспект лекцій складено з метою допомоги студентам будівельних, електромеханічних, екологічних і транспортних спеціальностей вузів при підготовці до занять, заліків та іспитів з розділу «Кінематика» курсу теоретичної механіки.

Він містить основні питання кінематики точки і твердого тіла, способи завдання і закони їх руху. Розглядаються простіші рухи твердого тіла, такі, як поступальний, обертальний і плоскопаралельний.

Викладено складний рух точки за допомогою абсолютного, переносного і коріолісового прискорень.

В кожному розділі наведено приклади задач та методичні вказівки до їх розв’язання.

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 1 від 28.08.2012 р.

ВСТУП В КІНЕМАТИКУ

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, що вивчає геометричні властивості руху тіл без урахування їх матеріальних характеристик (маси та ін.) і причин (діючі сили), що викликають і змінюють рух тіла.

Під ***рухом*** у механіці розуміється зміна з плином часу взаємного положення в просторі даного тіла відносно якого-небудь іншого тіла. Характер руху, що спостерігається, істотно залежить від вибору тіла, з яким пов'язаний спостерігач. Тверде тіло, відносно якого вивчається рух, називають ***тілом відліку***. Сукупність тіла відліку, з яким жорстко з'єднують систему координат, і годинника, що відлічує час, називають ***системою відліку***.

Простір у механіці, в якому відбувається рух тіл, розглядається як евклідовий. Час вважається «універсальним», тобто він припускається однаковим для всіх розглянутих систем відліку. У задачах кінематики час (скалярна величина, що безупинно змінюється) приймається за незалежну перемінну. Відлік часу ведеться від деякого умовно *початкового моменту* t_0 (звичайно приймають $t_0 = 0$), що збігається з початком спостереження або руху.

Основна задача кінематики полягає у встановленні *положень* точок тіла при його русі і методів визначення кінематичних величин, що характеризують цей рух – *швидкостей і прискорень*.

Основними об’єктами кінематики є *геометрична точка* (тіло, розмірами якого можна нехтувати у порівняння з характерними для задачі відстанями) і *абсолютно тверде тіло*.

Вивчення кінематики почнемо з найпростішого об’єкта – геометричної точки, або просто *точки*.

1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Способи завдання руху точки

Для розв’язання задач кінематики необхідно, щоб досліджуваний рух був заданий (описаний математичним виразом). Кінематично ***задати рух точки*** – означає задати положення цієї точки відносно даної системи відліку в будь-який момент часу. Якщо положення точки визначається якими-небудь координатами (параметрами), то треба задати залежність даних координат від часу t. Ця залежність називається кінематичним ***рівнянням руху*** або ***законом руху***.

Для завдання руху точки в просторі можна застосовувати один з трьох способів: векторний, координатний та натуральний.

1.1.1. Векторний спосіб завдання руху точки

Положення точки *M,* що рухається відносно системи відліку *Oxyz,* можна визначити, задаючи її *радіус-вектор* $\bar{r}$ (вектор, проведений з початку координат *O* в дану точку *M*) (рис. 1.1). При русі точки *M* її радіус-вектор $\bar{r}$ буде з плином часу змінюватися за модулем і напрямом, тобто буде вектором-функцією:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1.1}$$

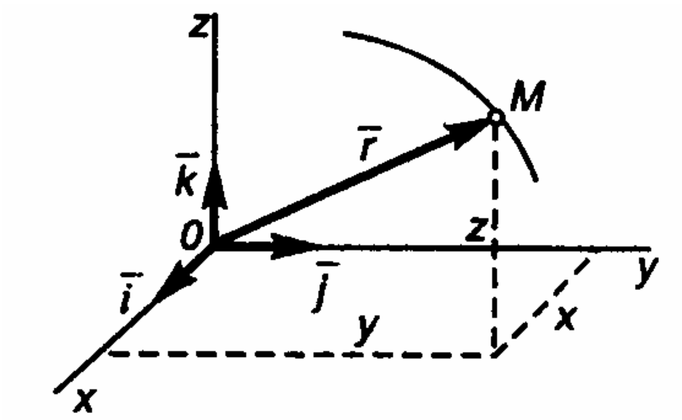


Рис. 1.1

Рівність (1.1) визначає положення точки *M* у просторі, а отже, закон або ***рівняння її руху у векторній формі***.

Неперервна лінія, яку описує точка, що рухається, відносно даної системи відліку, називається ***траєкторією точки***. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, рух точки називається ***прямолінійним***, а якщо крива – ***криволінійним***.

При векторному способі завдання руху траєкторією точки є геометричне місце кінців її радіуса-вектора $\bar{r}$ (годографа цього вектора).

1.1.2. Координатний спосіб завдання руху точки

Положення точки в просторі можна визначити також її декартовими координатами *x, y, z,* які під час руху точки будуть змінюватися з плином часу.

Отже рівняння руху точки в будь-який момент часу має вигляд

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{1.2}$$

Функціональні залежності (1.2) є ***рівняннями руху*** (законом руху) ***точки в прямокутних декартових координатах***. Зазначимо, що задати рух точки можна й іншими системами координат, наприклад, полярними, сферичними, циліндричними і т.д.

Рівняння руху (1.2) можна розглядати як рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де параметром є час *t*. Вилучивши з рівнянь руху час

t, можна визначити рівняння траєкторії в звичайній координатній формі, тобто у вигляді залежності між координатами x, y, z точки.

Перехід від координатного способу завдання руху точки до векторного, і навпаки, може бути здійснений у такий спосіб.

Задаючи одиничні вектори (орти) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ координатних осей і позначаючи проекції радіуса-вектора $\bar{r}$ на ці осі $r_x = x,\ r_y = y,\ r_z = z$ (рис. 1.1), одержимо для вектора $\bar{r}$ вираз

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\,. \tag{1.3}$$

Приклад 1. Нехай рух точки в площині xOy задано рівняннями

$$x = 2t,\ y = 1{,}5t^2. \tag{1.4}$$

З цих рівнянь можна визначити, що в момент часу $t_0 = 0$ точка знаходиться в положенні M_0 (0, 0), а у момент часу $t_1 = 1$ с – у положенні M_1 (2; 1,5) і т.д. Даючи часу t різні значення і зображуючи відповідні положення точок, можемо побудувати її траєкторію (рис. 1.2).

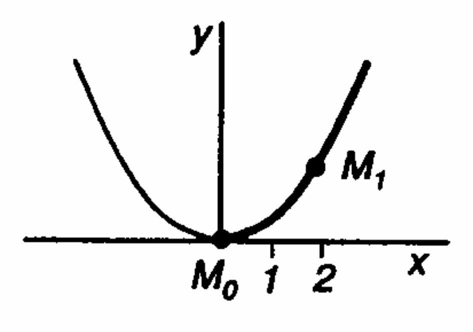


Рис. 1.2

Іншим шляхом траєкторію можна знайти, вилучивши t з рівнянь (1.4). З першого рівняння знаходимо $t = x/2$ і, підставляючи це значення t у друге рівняння, одержуємо y = (3/8)x^2. Отже, точка рухається по дузі параболи, вершина якої розташована на початку координат. Траєкторією руху буде тільки права вітка параболи (оскільки при $t \geq 0$ буде $x \geq 0$).

Зауваження. У ряді випадків час t можна виключити з рівнянь (1.2) іншими способами. Наприклад, виражаючи з одного із рівнянь і підставляючи в інше лінійний багаточлен відносно степенів t. Можна також використати властивості тригонометричних $(\sin^2 t + \cos^2 t = 1)$ або експоненціальних ($e^x \cdot e^{-x} = 1$) функцій.

1.1.3. Натуральний спосіб завдання руху точки

Цей спосіб завдання руху може бути застосований, якщо заздалегідь відома траєкторія руху точки (наприклад, траєкторія залізничного вагона, що рухається по рейках, і т.д.). Нехай крива AB є траєкторією точки M щодо системи відліку $Oxyz$ (рис. 1.3). Зазначимо на траєкторії нерухому точку O', яку приймемо за початок відліку *дугової координати* s (координати, що відлічується уздовж дуги траєкторії), і домовимося про напрями додатного і від'ємного відліку координати s.

Отже, на рис. 1.3 координата s для точок, що знаходяться на траєкторії праворуч початку відліку O', буде вважатися додатною, ліворуч O' – від'ємною.

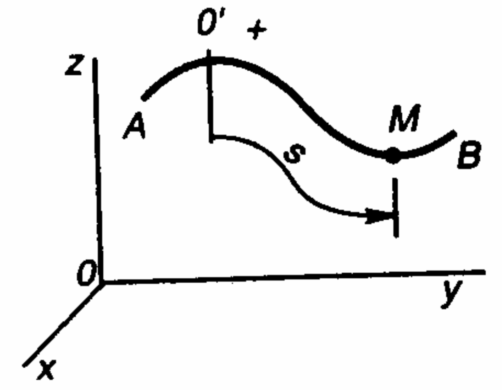


Рис. 1.3

Тоді, щоб визначити положення точки в будь-який момент часу, треба знати залежність дугової координати від часу:

$$s = f(t). \tag{1.4}$$

Рівняння (1.4) є ***рівнянням руху точки у натуральній формі***. Підкреслимо, що величина s у рівнянні (1.4) визначає положення точки на лінії її руху через відстань від *точки О* до *точки М*, вимірювану уздовж дуги траєкторії і взяту з відповідним знаком, а не пройдений точкою, що рухається, шлях.

1.2. Визначення швидкості та прискорення точки

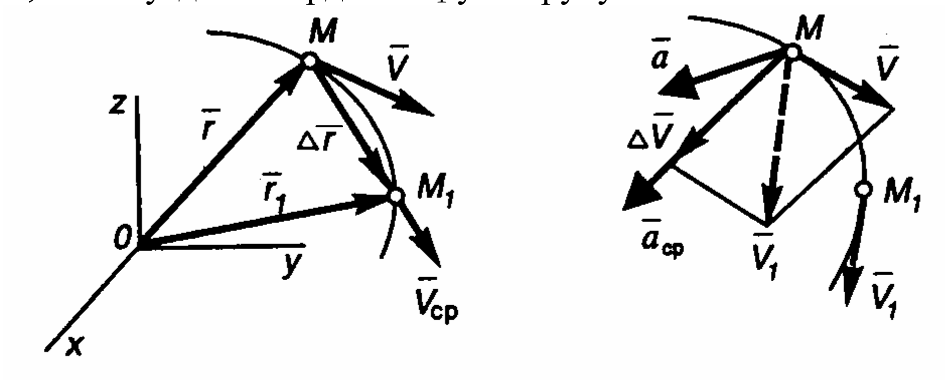
Основними кінематичними характеристиками руху точки є векторні величини – швидкість і прискорення точки.

1.2.1. Визначення швидкості та прискорення точки при векторному способі завдання її руху

Нехай точка, що рухається, знаходиться в момент часу t у положенні M, обумовленому радіусом-вектором $\bar{r}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t -$ у положенні M_1, обумовленому радіусом-вектором $\bar{r}_1$ (рис. 1.4,а). Переміщення точки за проміжок часу Δt визначається вектором переміщення точки $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$. Відношення вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу Δt дає векторну величину, що називається ***середньою швидкістю точки за проміжок часу*** Δt **:**

$$\overline{V}_{cp} = \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}. \qquad (1.5)$$

Вектор $\overline{V}_{cp}$, відповідно до виразу (1.5), спрямований так само, як і вектор $\Delta\overline{r}$, тобто уздовж хорди MM_1 у бік руху точки.



а) б)

Рис. 1.4

Швидкістю точки в даний момент часу t називається векторна величина $\overline{V}$, до якої прямує середня швидкість $\overline{V}_{cp}$, якщо відповідний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} (\overline{V}_{cp}) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t} \right) \quad \text{або} \quad \overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}. \qquad (1.6)$$

Отже, вектор швидкості точки в даний момент часу *дорівнює* першої похідної від радіуса-вектора точки за часом і *характеризує* бистроту зміни положення точки.

Оскільки граничним напрямом січної MM_1 є дотична (по ній спрямований також вектор елементарного переміщення $d\overline{r}$), то вектор швидкості в даний момент часу теж *спрямований* по дотичній до траєкторії точки у бік її руху (рис. 1.4,а).

При криволінійному русі точки в загальному випадку змінюється і напрям вектора швидкості та його модуль (числове значення). При прямолінійному русі точки вектор швидкості увесь час спрямований уздовж прямої, по якій рухається точка, і, отже, може змінюватися лише величина швидкості. Розмірність швидкості – м/с, км/ч.

Визначимомо поняття прискорення точки. Нехай у деякий момент часу t точка, що рухається, знаходиться в положенні М и має швидкість $\overline{V}$, а в момент часу $t_1 = t + \Delta t$ переміщується у положення M_1 і має швидкість $\overline{V}_1$ (рис. 1.4,б). Тоді за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ швидкість точки отримала зміну $\Delta\overline{V} = \overline{V}_1 - \overline{V}$. Зазначимо, що вектор $\Delta\overline{V}$ завжди спрямований в бік угнутості розглянутої траєкторії точки. Вектор ***середнього прискорення точки за проміжок часу*** Δt:

$$\overline{a}_{cp} = \Delta\overline{V} / \Delta t. \qquad (1.7)$$

Він має той самий напрям, що й вектор $\Delta\overline{V}$, тобто спрямований у бік угнутості ділянки траєкторії.

Прискоренням точки в даний момент часу *t* є векторна величина $\overline{a}$, до якої прямує середнє прискорення $\overline{a}_{cp}$, якщо відповідний проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t}\right) = d\overline{V}/dt \qquad (1.8)$$

або з урахуванням рівняння (1.6)

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2}. \qquad (1.9)$$

Отже, вектор прискорення точки в даний момент часу *дорівнює* першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від радіуса-вектора точки за часом і *характеризує* бистроту зміни швидкості точки (за модулем і напрямом). Розмірність прискорення – м/с^2.

З формули (1.9) маємо, що вектор прискорення $\overline{a}$ буде спрямований за напрямом елементарного приросту вектора швидкості $d\overline{V}$. Виходячи з цього, встановимо розташування вектора $\overline{a}$ відносно траєкторії точки. *При прямолінійному русі* вектор $\overline{a}$ *спрямований* уздовж прямої, по якій рухається точка. *При криволінійному русі* вектор $\overline{a}$ *спрямований* у бік угнутості траєкторії (рис. 1.4,б) і розташовується в дотичній площині. Для різних точок просторової кривої положення дотичної площини буде своє. Якщо траєкторією точки є плоска крива, то дотична площина збігається з площиною цієї кривої.

1.2.2. Визначення швидкості та прискорення точки при координатному способі завдання її руху

Загальні формули (1.6) і (1.9), що визначають величини $\overline{V}$ і $\overline{a}$, містять похідні від вектора $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Диференціюючи за часом цей вираз, одержимо

$$\frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k} \qquad (1.10)$$

або

$$\overline{V} = V_x\overline{i} + V_y\overline{j} + V_z\overline{k}. \qquad (1.11)$$

Звідси маємо, що *проекції швидкості точки на координатні осі* дорівнюють першим похідним від відповідних координат точки за часом:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \qquad (1.12)$$

де точка над буквою є символом диференціювання за часом.

Модуль швидкості та її напрям у просторі (позначивши кути, що утворить вектор $\overline{V}$ з осями *x, y, z* відповідно α, β, γ) знайдемо за формулами

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,, \tag{1.13}$$

$$\cos\alpha = V_x / V\,,\ \cos\beta = V_y / V\,,\ \cos\gamma = V_z / V\,. \tag{1.14}$$

Таким чином, *швидкість точки при координатному способі завдання її руху визначається формулами (1.12) ÷ (1.14).*

Вектор прискорення $\overline{a}$ відповідно знайдемо диференціюванням за часом виразу (1.10) або (1.11). Одержимо

$$\overline{a} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\overline{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\overline{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\overline{k}$$

або

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\overline{i} + \frac{dV_y}{dt}\overline{j} + \frac{dV_z}{dt}\overline{k}\,,$$

або

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}\,. \tag{1.15}$$

Звідси випливає, що *проекції вектора прискорення точки на осі координат* дорівнюють першим похідним від відповідних проекцій вектора швидкості або другим похідним від відповідних координат точки за часом:

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x},\quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y},\quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}\,. \tag{1.16}$$

Модуль і напрям прискорення будуть

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \tag{1.17}$$

$$\cos\alpha_1 = a_x / a\,,\ \cos\beta_1 = a_y / a\,,\ \cos\gamma_1 = a_z / a\,, \tag{1.18}$$

де $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – кути між вектором $\overline{a}$ і координатними осями *x, y, z.*

Отже, *прискорення точки при координатному способі завдання її руху визначається формулами (1.16), (1.17), (1.18).*

1.2.3. Визначення швидкості та прискорення точки при натуральному способі завдання її руху

При натуральному способі завдання руху задається траєкторія точки і закон її руху уздовж траєкторії у виді *s* = *f*(*t*).

У цьому випадку значення векторів $\overline{V}$ і $\overline{a}$ визначають за їх проекціями не на осі нерухомої системи відліку *Oxyz*, а на осі рухомої прямокутної системи координат $M\tau nb$, що має початок у точці *M* і рухається разом з нею по траєкторії (рис. 1.5). Ці осі є *осями натурального тригранника*, спрямовані в такий спосіб: вісь $M\tau$ (*дотична*) – по дотичній до траєкторії у бік додатного відліку відстані *s;* вісь *Mn* (*головна нормаль*) – лежить у дотичній площині і напрямлена перпендикулярно до дотичної в бік угнутості траєкторії; вісь *Mb* (*бінормаль*) – перпендикулярна до перших двох осей, утворюючи з ними праву систему осей ($\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$). Тут $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ – відповідно орти (одиничні вектори) осей системи координат $M\tau nb$.

Вектор швидкості при натуральному способі завдання руху точки буде

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \tag{1.19}$$

де ds – елементарне переміщення точки по дузі траєкторії.

Введемо одиничний вектор $\bar{\tau} = d\bar{r}/ds$, спрямований по дотичній до траєкторії точки у бік додатного відліку відстані s.

Тоді

$$\bar{V} = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{\tau} \text{ або } \bar{V} = V_\tau \cdot \bar{\tau}, \tag{1.20}$$

де

$$V_\tau = ds/dt = \dot{s}, \tag{1.21}$$

V_τ – *проекція вектора швидкості на дотичну*, яка дорівнює першій похідній від відстані (криволінійної координати) s цієї точки за часом.

Величина V_τ може мати знак плюс або мінус: якщо $V_\tau > 0$, то швидкість спрямована у бік додатного відліку відстані s; якщо $V_\tau < 0$ – у протилежну сторону. Отже, знак V_τ визначає напрям вектора $\bar{V}$ відносно осі τ. На рис. 1.5 вектор $\bar{V}$ зображений для випадку, коли $V_\tau > 0$, тобто напрями вектора $\bar{V}$ й осі τ збігаються. З (1.18) маємо, що модуль швидкості $\bar{V}$ й осі τ збігаються. З (1.20) маємо, що *модуль швидкості буде*

$$V = |V_\tau|. \tag{1.22}$$

Таким чином, *швидкість точки при натуральному способі завдання її руху визначається формулами (1.21), (1.22).*

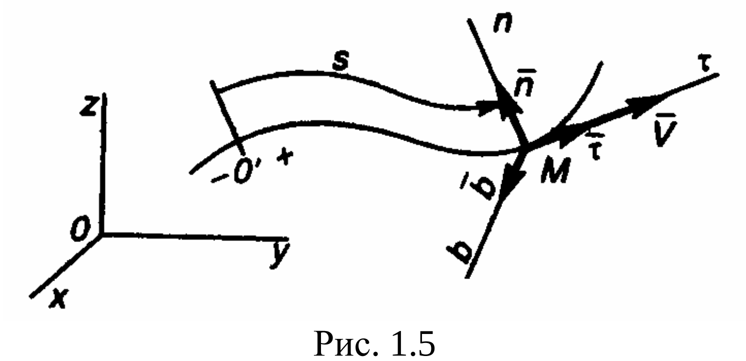


Рис. 1.5

Визначимо прискорення точки за формулою (1.9), продиференціюючи за часом вираз (1.18):

$$a = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d(V_\tau \cdot \bar{\tau})}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt}\bar{\tau} + V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \tag{1.23}$$

Знайдемо

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \bar{n} \cdot V_{\tau} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{n} \cdot V_{\tau} ,$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту вектора $\bar{\tau}$; ρ – радіус кривини траєкторії в розглянутій точці.

Підставивши цей вираз в (1.20), маємо

$$\bar{a} = \frac{dV_{\tau}}{dt} \cdot \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \cdot \bar{n} . \qquad (1.24)$$

Отже, прискорення точки дорівнює геометричній сумі двох векторів, один з яких $\bar{a}_{\tau}$ спрямований по дотичній (дотичне прискорення), а другий – вектор $\bar{a}_n$ спрямований по головній нормалі (нормальне прискорення):

$$\bar{a} = \bar{a}_{\tau} + \bar{a}_n . \qquad (1.25)$$

Проекції прискорення точки на осі натурального тригранника визначаються за формулами:

$$a_{\tau} = \frac{dV_{\tau}}{dt} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}, \quad a_b = 0. \qquad (1.26)$$

де проекції на вісь дотичної a_{τ} і на вісь головної нормалі a_n називають відповідно *дотичним* і *нормальним прискореннями* точки.

Оскільки складові $\bar{a}_{\tau}$ і $\bar{a}_n$ взаємно перпендикулярні, для модуля вектора $\bar{a}$ одержимо:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} . \qquad (1.27)$$

Таким чином, *прискорення точки при натуральному способі завдання її руху визначається формулами (1.26), (1.27).*

На підставі формул (1.23) маємо: величина a_{τ} (проекція вектора $\bar{a}$ на напрям τ) може бути додатною, від'ємною або дорівнювати нулю; величина a_n по криволінійній траєкторії завжди додатна, цим визначається, що складова $\bar{a}_n$ буде завжди спрямована у бік угнутості кривої; величина a_b (проекція прискорення на бінормаль) дорівнює нулю.

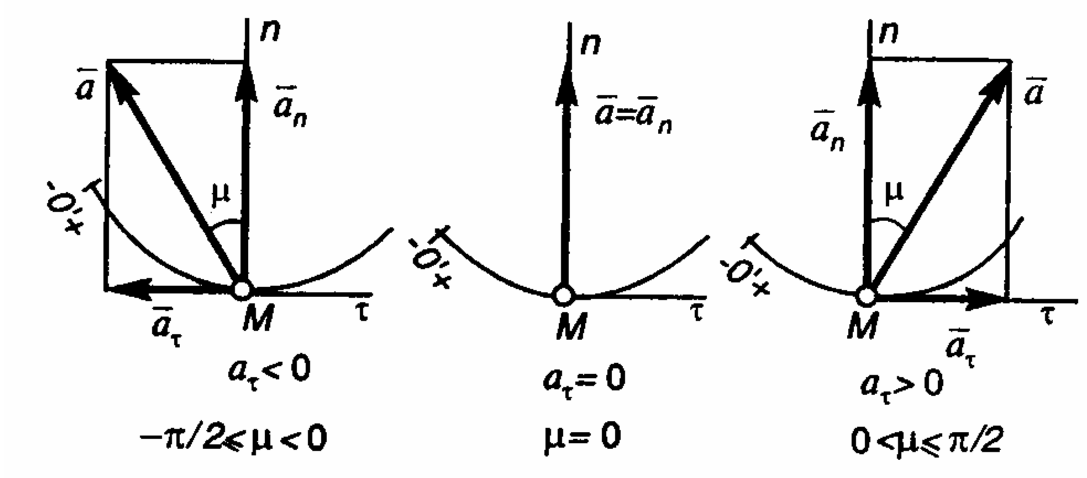
Кут μ відхилення вектора $\bar{a}$ від нормалі *Mn* визначаємо за формулою

$$tg\mu = a_{\tau} / a_n , \qquad (1.28)$$

його значення може бути в інтервалі $-\pi/2 \le \mu \le \pi/2$.

Якщо $a_{\tau} < 0$, то $\mu < 0$ і вектор $\bar{a}$ відхилений від нормалі *M* в сторону, протилежну додатному напряму осі $M\tau$ (рис. 1.6,а); при $a_{\tau} > 0$ кут $\mu > 0$ і вектор $\bar{a}$ відхиляється від нормалі за напрямом осі $M\tau$ (рис. 1.6,в); якщо $a_{\tau} = 0$, то $\mu = 0$ і вектор $\bar{a}$ спрямований по нормалі *Mn* (рис. 1.6,б).

У загальному випадку руху точки може змінюватися і модуль, і напрям вектора швидкості. Аналіз формул (1.23) приводить до висновку: *дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною, нормальне прискорення – зміну напряму вектора швидкості.*



а) б) в)

Рис. 1.6

Рух точки називається ***прискореним***, якщо величина її швидкості зростає з часом. В цьому разі знаки проекцій a_τ і V_τ, а також напрямки векторів $\overline{a}_\tau$ і $\overline{V}$ співпадають (рис. 1.6,в).

Рух точки називається ***сповільненим***, якщо величина її швидкості з часом зменшується. В цьому разі знаки проекцій a_τ і V_τ, а також напрямки векторів $\overline{a}_\tau$ і $\overline{V}$ протилежні (рис. 1.6,а).

1.3. Окремі випадки руху точки

1. ***Рівнозмінний рух.*** Рівнозмінним називається рух точки по траєкторії, при якому дотичне прискорення залишається увесь час постійним: $a_\tau = const$.

Знайдемо закон цього руху, вважаючи, що при $t_0 = 0$ виконується $s = s_0$ і $V_\tau = V_0$. Відповідно до першої з формул (1.23) $dV_\tau = a_\tau dt$. Беручи від обох частин цього рівняння визначені інтеграли (з урахуванням, що $a_\tau = const$), отримаємо закон зміни швидкості точки при рівнозмінному русі:

$$V_\tau = V_0 + a_\tau t. \tag{1.29}$$

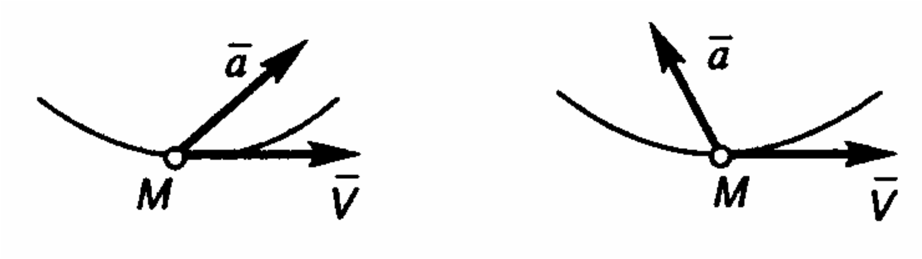
Формулу (1.29) представимо у вигляді

$$ds/dt = V_0 + a_\tau t \text{ або } ds = V_0 \cdot dt + a_\tau \cdot dt.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, знайдемо закон рівнозмінного руху точки:

$$s = a_\tau t^2/2 + V_0 t + s_0. \tag{1.30}$$

При ***рівноприскореному*** русі величини V_τ і a_τ мають однакові знаки (кут між векторами $\overline{V}$ і $\overline{a}$ – гострий, рис. 1.7,а), при ***рівносповільненому*** русі величини V_τ і a_τ мають різні знаки (кут між векторами $\overline{V}$ і $\overline{a}$ тупий, рис. 1.7, б).



а) б)

Рис. 1.7

2. Рівномірний рух. ***Рівномірним*** називається рух точки по траєкторії, при якому числове значення швидкості увесь час залишається постійним: $V_\tau = const$. З формули (1.26) випливає, що $a_\tau = const = 0$, тому останнє співвідношення можна вважати *умовою рівномірного руху*.

У загальному випадку руху прискорення точки буде представлено лише нормальною складовою $\bar{a} = \bar{a}_n$ і $a = a_n = V^2/\rho$ (рис. 1.6,б). В цьому разі прискорення обумовлене тільки зміною вектора швидкості точки за напрямом.

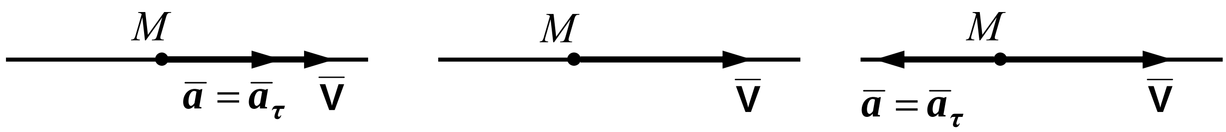
Знайдемо закон рівномірного руху. З формули (1.21) маємо $ds = V_\tau \cdot dt$. Якщо в початковий момент часу $t_0 = 0$ точка має координату s_0, то, беручи від лівої і правої частин рівняння визначені інтеграли (з урахуванням, що $V_\tau = const$), отримаємо

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{0}^{t} V_\tau dt \quad \text{або} \quad s - s_0 = V_\tau t \, .$$

Остаточно знаходимо *закон рівномірного руху точки* у вигляді

$$s = s_0 + V_\tau t \, . \tag{1.31}$$

3. Прямолінійний рух. *Умовою прямолінійного руху* є рівність нулю нормального прискорення точки у будь-який момент часу: $a_n = const = 0$. Це витікає з формули (1.26), оскільки при русі точки по прямолінійній траєкторії радіус кривини $\rho = \infty$. У цьому випадку прискорення точки збігається з дотичною складовою $\bar{a} = \bar{a}_\tau$ і напрямлено уздовж прямої, що є траєкторією руху. Відзначимо, що при прискореному русі вектори швидкості і прискорення збігаються за напрямом (рис. 1.8,а), при сповільненому мають протилежні напрямки (рис. 1.8,в), а *рівномірний прямолінійний рух* є єдиним рухом, у якому прискорення точки увесь час дорівнює нулю $a = 0$ (рис. 1.8,б).



а) б) в)

Рис. 1.8

4. Криволінійний рух. У випадку руху точки по криволінійній траєкторії вектор швидкості неперервно змінює свій напрям, тому *умовою криволінійного руху* є нерівність нулю нормального прискорення точки: $a_n \neq 0$. В залежності від характеру руху, який визначається величиною дотичного прискорення a_τ, можливі ситуації, що зображені на рис. 1.6,а,б,в.

5. Особливі випадки. Можливі ситуації, коли дотичне або нормальне прискорення змінюються при русі точки, проте в розглядуваний момент часу дорівнюють нулю:

1) $a_{\tau 1} = 0$. З огляду на (1.26), це означає рівність нулю в даний момент першої похідної швидкості точки за часом, тобто величина швидкості досягає екстремуму (максимуму або мінімуму). З фізичної точки зору, в даній точці відбувається зміна характеру руху із прискореного на сповільнений або навпаки. Встановити це можна за знаком другої похідної швидкості за часом, або за значенням швидкості точки в інший, достатньо близький до даного, момент часу;

2) $a_{n1} = 0$. З формули (1.26) витікає, що це може означати два випадки:

а) в даний момент часу швидкість дорівнює нулю $V_1 = 0$. Фізично це може означати, що в даний момент часу напрям руху точки змінюється на протилежний;

б) в даний момент часу дорівнює нескінченності радіус кривини траєкторії точки $\rho_1 = \infty$. Ця ситуація виникає у точці перегину траєкторії, де змінюється напрям її угнутості.

1.4. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Закон руху точки *M* в площині *xOy* заданий рівняннями $x = 4\sin(t) - 1, \quad y = 3\cos(t) + 2$, де *x, y* – у сантиметрах, *t* – у секундах.

Визначити рівняння траєкторії точки та для моменту часу $t_1 = \pi / 3$ с знайти її положення на траєкторії, швидкість, прискорення, дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривини траєкторії. Траєкторію та знайдені векторні величини відобразити на схемі. У відповіді до задачі проаналізувати отримані результати.

Розв'язання

1) Рівняння траєкторії точки будемо шукати у вигляді залежності між координатами точки (у координатній формі). Для вилучення з рівнянь руху часу t, що входить в аргументи тригонометричних функцій, використовуємо формулу

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1. \qquad (1)$$

З рівнянь руху знаходимо вираз відповідних функцій і підставляємо в рівняння (1). Отримаємо

$$\sin(t) = \frac{x+1}{4}, \quad \cos(t) = \frac{y-2}{3},$$

звідки

$$\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1. \qquad (2)$$

Отже, траєкторією точки є еліпс, центр C якого має координати (-1, 2), а розміри півосей, паралельних осям x і y, відповідно 4 і 3 см (рис. 1.9).

2) Знайдемо положення точки на траєкторії у заданий момент часу t_1, тобто визначимо координати точки M_1:

$$x_1 = 4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}46\,\text{см}; \quad y_1 = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 = 3\cdot\frac{1}{2} + 2 = 3{,}5\ \text{см}.$$

Зобразимо точку з координатами (2,46; 3,5) на траєкторії (рис. 1.9). При правильних розрахунках координат точки і рівняння її траєкторії точка M_1 повинна лежати на побудованій кривій.

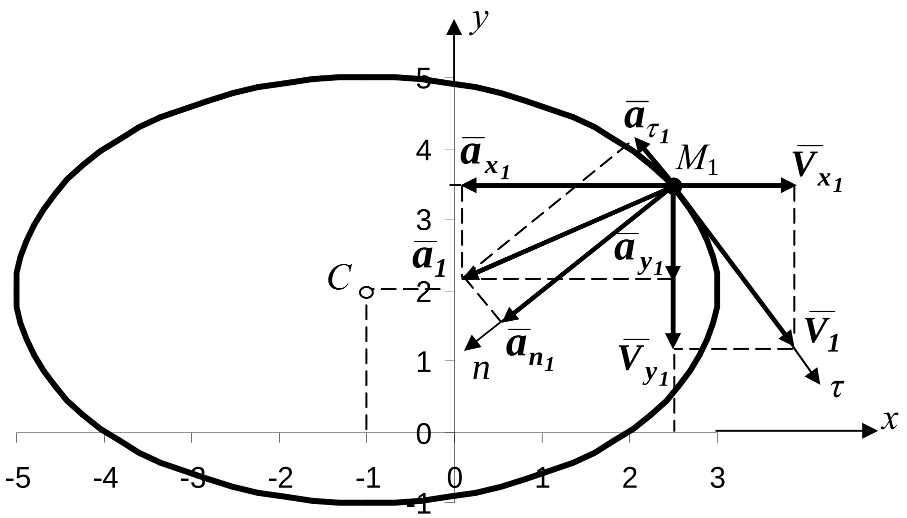


Рис. 1.9

3) Визначимо проекції швидкості точки на осі координат:

$$V_x = \dot{x} = 4\cos(t); \quad V_y = \dot{y} = -3\sin(t),$$

або у заданий момент часу t_1:

$$V_{x1} = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\cdot\frac{1}{2} = 2\,\text{см/с}; \quad V_{y1} = -3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -2{,}6\ \text{см/с}.$$

Модуль швидкості у заданий момент часу знайдемо за її проекціями на осі координат:

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{2^2 + (-1{,}5\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 6{,}75} = 3{,}28\ \text{см/с}. \qquad (3)$$

Використовуючи отримані результати, побудуємо на схемі вектори $\overline{V}_{x1}$, $\overline{V}_{y1}$ з урахуванням знаків їх проекцій, а далі вектор $\overline{V}_1$, як діагональ прямокутника, що побудований на своїх складових (рис. 1.9). При правильних розрахунках вектор швидкості має бути напрямленим по дотичній до траєкторії в точці M_1.

4) Знайдемо далі прискорення точки:

$$a_x = \dot{V}_x = -4\sin(t), \quad a_y = \dot{V}_y = -3\cos(t).$$

У заданий момент часу t_1:

$$a_{x1} = -4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3{,}46 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{y1} = -3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{2} = -1{,}5 \text{ см/с}^2.$$

Модуль прискорення у заданий момент часу знайдемо за його проекціями на осі координат:

$$a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-1{,}5)^2} = \sqrt{12 + 2{,}25} = 3{,}77 \text{ см/с}^2. \qquad (4)$$

Використовуючи отримані результати, побудуємо на схемі вектори $\overline{a}_{x1}$, $\overline{a}_{y1}$ з урахуванням знаків їх проекцій, а далі вектор $\overline{a}_1$, як діагональ прямокутника, що побудований на своїх складових (рис. 1.9). При правильних розрахунках вектор прискорення має бути напрямленим у бік угнутості траєкторії.

Визначимо тепер дотичне і нормальне прискорення точки.

5) Дотичне прискорення знайдемо, диференціюючи за часом рівняння для модуля швидкості $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$:

$$\dot{V} = \left(2\mathrm{V}_x\dot{V}_x + 2\mathrm{V}_y\dot{V}_y\right)/\, 2\mathrm{V}.$$

Тоді, враховуючи, що $\dot{V} = a_\tau, \dot{V}_x = a_x, \dot{V}_y = a_y$, маємо

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \qquad (5)$$

Підставляючи в (5) числові значення величин для заданого моменту часу t_1, отримаємо:

$$a_{\tau 1} = \frac{2 \cdot (-3{,}46) + (-2{,}6) \cdot (-1{,}5)}{3{,}28} = -0{,}92 \text{ см/с}^2.$$

Проведемо з точки M_1 вісь дотичної τ як продовження вектора її швидкості. Побудуємо дотичну складову прискорення $\overline{a}_{\tau 1}$, проектуючи вектор $\overline{a}$ на вісь τ (рис. 1.9).

6) Нормальне прискорення точки при відомих значеннях величин a і a_n обчислимо за формулою:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \qquad (6)$$

Для заданого моменту часу t_1

$$a_{n1} = \sqrt{14{,}25 - 0{,}85} = 3{,}66 \text{ см/с}^2.$$

Проведемо з точки M_1 вісь головної нормалі n перпендикулярно до дотичної в бік угнутості траєкторії. Побудуємо нормальну складову прискорення $\overline{a}_{n1}$, проектуючи вектор $\overline{a}$ на вісь n (рис. 1.9). При правильних розрахунках значення дотичного (з урахуванням знаку) і нормального прискорень, що виміряні з рисунка, повинні збігатися з величинами, визначеними за формулами (5) і (6).

7) Радіус кривини траєкторії визначимо за формулою:

$$\rho = V^2 / a_n . \tag{7}$$

Для заданого моменту часу t_1

$$\rho_1 = 10{,}75 / 3{,}66 = 2{,}94 \text{ см}.$$

Відповідь: x_1=2,46 см; y_1=3,5 см; V_1 = 3,28 см/с; a_1 = 3,77 см/с^2;
$a_{\tau 1}$ = -0,92 см/с^2; a_{n1} =3,66 см/с^2, ρ_1 = 2,94 см.

Точка рухається уздовж еліпса, за стрілкою годинника (на це указує напрям вектора швидкості $\overline{V}_1$), сповільнено (оскільки дотичне прискорення від'ємне: $a_{\tau 1} < 0$). Рух точки не є рівнозмінним, тому що дотичне прискорення, отримане за формулою (5) для довільного моменту часу, містить параметр t, від якого не можна позбавитись шляхом алгебраїчних перетворень:

$$a_\tau = \frac{(4\cos(t))\cdot(-4\sin(t)) + (-3\sin(t))\cdot(-3\cos(t))}{\sqrt{(4\cos(t))^2 + (-3\sin(t))^2}} = \frac{-7\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{(4\cos(t))^2 + (-3\sin(t))^2}}.$$

Приклад 2. Матеріальна точка рухається у площині xOy. Початкова швидкість $\overline{V}_0$ утворює з горизонтом кут α. Рух точки задано рівняннями:

$$x = V_0 t\cos\alpha, \quad y = V_0 t\sin\alpha - gt^2/2,$$

де g – постійна величина (прискорення вільного падіння).

Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, висоту траєкторії і час підйому з початкового положення (точки O) до найвищої точки траєкторії, а також координату x_B точки перетину траєкторії з горизонтальною віссю.

Розв'язання

1) Для визначення траєкторії потрібно знайти залежність між координатами x і y точки, що рухається. Визначивши з першого рівняння $t = x/V_0 \cdot \cos\alpha$ і підставивши в друге, маємо рівняння траєкторії

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}. \tag{1}$$

Отже, траєкторія точки – парабола, гілки якої напрямлені вниз (рис. 1.10).

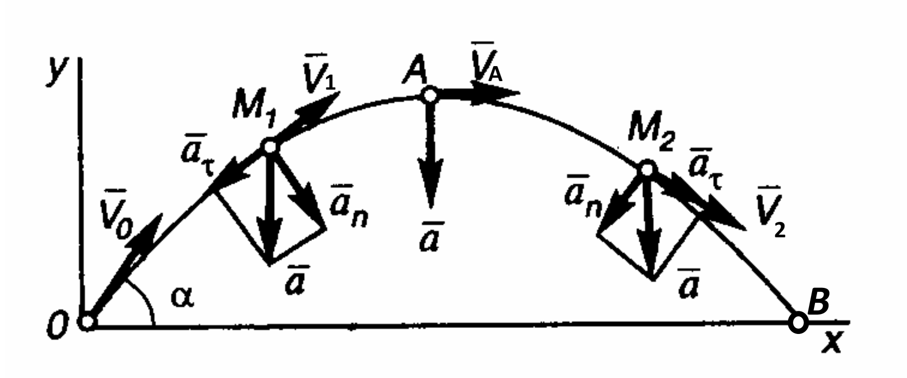


Рис. 1.10

2) Диференціючи рівняння руху за часом, знайдемо проекції швидкості:

$$V_x = \dot{x} = V_0\cos\alpha, \quad V_y = \dot{y} = V_0\sin\alpha - gt, \tag{2}$$

а також модуль швидкості

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 - 2V_0\sin\alpha \cdot gt + g^2t^2}\ . \tag{3}$$

3) Визначаємо прискорення точки. Для проекцій прискорення $\bar{a}$ на осі координат маємо:

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = -g\,. \tag{4}$$

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0 + (-g)^2} = g\ . \tag{5}$$

Таким чином, точка рухається з постійним за модулем і напрямом прискоренням, паралельним вертикальної осі Oy. Звертаємо увагу на те, що хоча модуль a = const, рух точки не є рівнозмінним, оскільки умовою рівнозмінності руху є не $a = const$, а $a_\tau = const$. У розглянутому русі a_τ не буде постійним, а залежитиме від часу:

$$a_\tau = \dot{V} = -\frac{g(V_0\sin\alpha - gt)}{\sqrt{V_0^2 - 2V_0\sin\alpha \cdot gt + g^2t^2}} = -\frac{g(V_0\sin\alpha - gt)}{V}. \tag{6}$$

4) Тепер визначимо висоту траєкторії руху, тобто координату y_A найвищої точки (рис. 1.10). Оскільки V_{Ay} = 0 (вектор швидкості $\bar{V}_A$ є перпендикулярним осі y), то підставивши це значення в друге рівняння (2), знайдемо час руху з точки O в точку A (час підйому): $t_A = V_0\sin\alpha / g$. Підставивши значення $t = t_A$ в друге із заданих рівнянь руху, після спрощень отримуємо висоту траєкторії:

$$y_A = \left(V_0^2 / 2g\right)\sin^2\alpha\,.$$

Оскільки розглянутий рух відбувається зі змінним за часом дотичним прискоренням ($a_\tau \neq const$, формула (6)), то на гілці підйому (від точки O до точки A) рух буде сповільненим (див. положення M_1 на рис. 1.10: вектори $\bar{a}_\tau$ і $\bar{V}_1$ спрямовані протилежно один одному), а на гілці спуску –

прискореним (див. положення M_2 на рис. 1.10: вектори $\bar{a}_\tau$ і $\bar{V}_2$ спрямовані в один бік).

5) Координату x_B можна знайти з умови $y_B = 0$. Використовуючи рівняння (1), отримаємо:

$$0 = x_B tg\alpha - \frac{g x_B^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Це рівняння має два розвязка, один з яких ($x = 0$) відповідає початку координат, а інший визначає положення точки В:

$$x_B = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

1.5. Питання для самостійної роботи

1. Чим відрізняється дугова координата s точки від пройденого нею шляху? Коли вони збігаються?
2. Чи залежить напрям орта $\bar{\tau}$ дотичної до траєкторії від напряму руху точки?
3. Які зміни вектора швидкості характеризують дотичне і нормальне прискорення?
4. Чи може точка, що рівномірно рухається, мати прискорення?
5. Чи однакові поняття «рух точки з прискоренням» і «прискорений рух точки»?
6. Як визначити, рух точки є прискореним чи уповільненим?
7. Як напрямлена швидкість точки, яка рухається по криволінійній траєкторії?
8. Як напрямлене прискорення точки, яка рухається по криволінійній траєкторії?
9. Якими способами можна задати рух точки?
10. Як можна охарактеризувати рух точки, якщо її дотичне прискорення не від’ємне?
11. В якому випадку руху точки її дотичне і нормальне прискорення одночасно дорівнюють нулю?
12. Який рух точки називають рівномірним, рівнозмінним?
13. Що таке траєкторія руху точки?
14. Дайте визначення механічного руху точки.

2. ПОСТУПАЛЬНИЙ І ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА

При вивченні кінематики твердого тіла можна виділити дві задачі:

1) задання руху і визначення кінематичних характеристик руху тіла в цілому;

2) визначення кінематичних характеристик руху окремих точок тіла.

2.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається під час руху паралельною своєму початковому напряму, тобто не повертається.

Точки тіла, що рухаються поступально, можуть мати траєкторії будь-якого виду: прямолінійні або криволінійні.

Властивості поступального руху тіла визначаються наступною теоремою. Теорема: *при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують геометрично однакові (при накладенні співпадаючі) траєкторії і мають у кожний момент часу однакові за модулем і напрямом швидкості та прискорення.*

Доведення. Розглянемо тіло, що робить поступальний рух (рис. 2.1). Для радіусів-векторів двох довільних точок A і B тіла справедлива рівність

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}. \tag{2.1}$$

Варто мати на увазі, що довжина вектора – AB постійна, як відстань між точками абсолютно твердого тіла, а його напрям залишається незмінним при поступальному русі тіла, отже $\overline{AB} = const$.

Тоді з рівняння (2.1) отримуємо, що годограф радіуса-вектора точки A, що є траєкторією цієї точки, зміщений відносно годографа радіуса-вектора точки B (траєкторії точки B) на постійний вектор $\overline{AB}$ і ці траєкторії при накладенні збігаються.

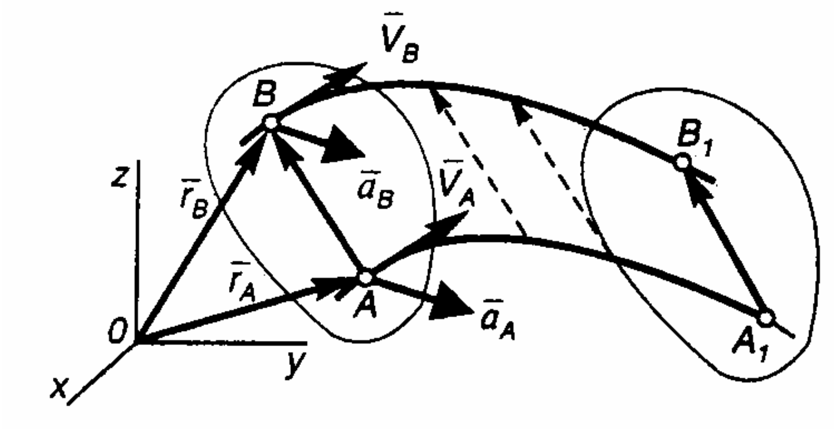


Рис. 2.1

Продиференціювавши обидві частини рівняння (2.1), врахувавши при цьому, що $d(\overline{AB})/dt = 0$, маємо

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A \text{ і } \overline{a}_B = \overline{a}_A . \qquad (2.2)$$

Отже, теорему доведено.

З теореми випливає, що поступальний рух твердого тіла цілком визначається рухом будь-якої однієї з його точок. Тобто, вивчення кінематики поступального руху зводиться до задачі кінематики точки, розглянутої до цього.

З огляду на вищенаведені властивості поступального руху, однакову для всіх точок тіла швидкість $\overline{V}$ називають швидкістю поступального руху тіла, а прискорення точок $\overline{a}$ – прискоренням поступального руху тіла.

Зазначимо, що поняття «швидкість тіла» і «прискорення тіла» мають значення тільки при поступальному русі тіла, оскільки тільки в цьому випадку ці характеристики однакові для всіх точок тіла.

2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому пряма, що проходить через яку-небудь дві точки, залишається під час руху нерухомою (рис. 2.2). Ця пряма називається віссю обертання. Траєкторіями всіх точок, що не лежать на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні осі обертання, а центри лежать на цій віссю.

Відзначимо також, що всі прямі тіла, паралельні осі обертання (наприклад, пряма *mm’* на рис. 2.2), рухаються поступально, залишаючись паралельними цієї осі.

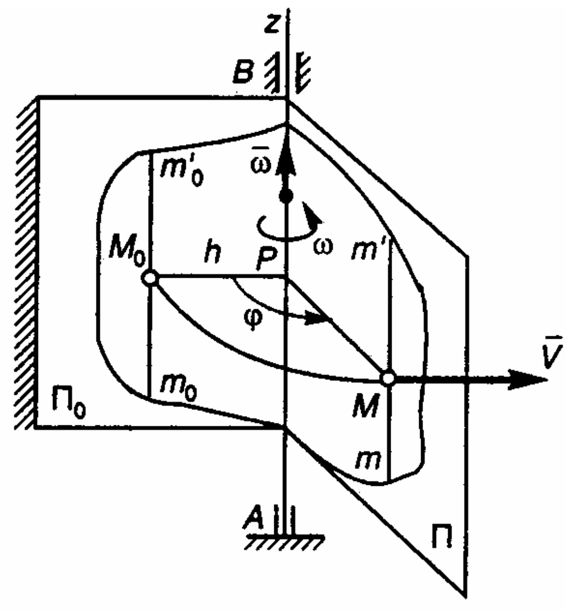


Рис. 2.2

2.2.1. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла

Проведемо через вісь обертання *Az* тіла (рис. 2.2) дві півплощини: півплощину *П*, яка незмінно зв'язана з тілом і обертається разом з ним, та нерухому в просторі півплощину $П_0$. Тоді положення тіла в будь-який момент часу визначається взятим з відповідним знаком кутом φ між цими півплощинами, що називається *кутом повороту тіла*. Кут вважається додатним, якщо тіло обертається навколо нерухомої осі в напряму проти ходу годинникової стрілки (для спостерігача, що дивиться з позитивного кінця осі *Az*), і від'ємним, якщо воно обертається за ходом годинникової стрілки. Виміряється кут φ у радіанах: $[\varphi] = \text{рад}$.

Щоб знати положення тіла в будь-який момент часу, треба знати залежність кута φ від часу *t*, тобто

$$\varphi = f(t). \qquad (2.3)$$

Рівняння (2.3) виражає закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла є його кутова швидкість ω і кутове прискорення ε.

Кутова швидкість характеризує зміну за часом кута повороту тіла, а її числове (алгебраїчне) значення дорівнює першій похідній від кута повороту за часом:

$$\omega = d \ \ / dt \text{ або } \omega = \dot{\varphi} \ . \qquad (2.4)$$

Знак ω визначає напрям обертання: якщо $\omega > 0$, то обертання відбувається проти ходу годинниковій стрілки, якщо $\omega < 0$, то тіло обертається за ходом годинникової стрілки. Графічно це відображається за допомогою дугової стрілки ω (рис. 2.2). Розмірність кутової швидкості – рад/с.

У техніці кутову швидкість часто визначають числом обертів за хвилину, зазначаючи цю величину через *n* об/хв. Оскільки за один оберт тіло повертається на кут 2π рад, а 1 хв = 60 с, то

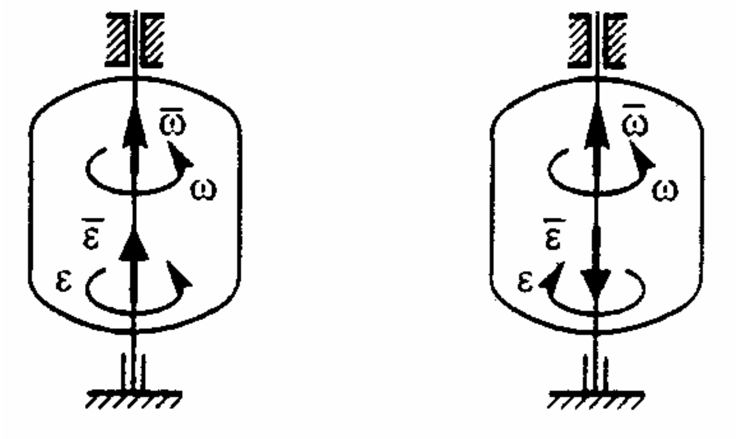
$$\omega = 2\pi n / 60 = \pi n / 30.$$

Усі параметри кутової швидкості тіла можна відобразити у вигляді вектора $\overline{\omega}$, модуль якого дорівнює $|\dot{\varphi}|$ і який спрямований уздовж осі обертання у той бік, звідки видно, що обертання відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.2; 2.3).

Кутове прискорення характеризує зміну за часом кутової швидкості тіла, а його числове (алгебраїчне) значення дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла за часом:

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} . \qquad (2.5)$$

Розмірність кутового прискорення – рад/с^2.



а) б)

Рис. 2.3

При збіжності знаків ε і ω їх дугові стрілки спрямовані однаково (рис. 2.3,а), при різних знаках – дугові стрілки будуть спрямовані взаємно протилежно (рис. 2.3,б). Кутове прискорення тіла можна зобразити у вигляді вектора $\overline{\varepsilon}$, спрямованого уздовж осі обертання. При цьому

$$\overline{\varepsilon} = d\overline{\omega} / dt . \tag{2.6}$$

Коли тіло обертається прискорено, то величини ω і ε мають однакові знаки і напрям вектора $\overline{\varepsilon}$ збігається з напрямом вектора $\overline{\omega}$ (рис. 2.3,а). Коли тіло обертається уповільнено, то величини ω і ε мають різні знаки і вектори $\overline{\omega}$ і $\overline{\varepsilon}$ спрямовані уздовж осі обертання в протилежні боки (рис. 2.3,б).

Якщо кутова швидкість тіла залишається за весь час руху постійною (ω = *const*), то обертання тіла називається *рівномірним* $(\varepsilon = 0)$.

Інтегруючи рівність $d\varphi = \omega \cdot dt$ (вважаючи при цьому, що в початковий момент часу $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$), одержимо *закон рівномірного обертання:*

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t . \tag{2.7}$$

Якщо кутове прискорення тіла за весь час руху залишається постійним (ε = *const*), то обертання називається *рівнозмінним.*

Інтегруючи рівність $d\omega = \varepsilon \cdot dt$ (вважаючи при цьому, що в початковий момент часу $t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\omega = \omega_0$), одержимо:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t . \tag{2.8}$$

Представляючи цей вираз як $d\varphi / dt = \omega_0 + \varepsilon t$ або у вигляді $d\varphi / dt = \omega_0 + \varepsilon t$ і вдруге інтегруючи, знайдемо *закон рівнозмінного обертання*:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2 . \tag{2.9}$$

2.2.2. Швидкості та прискорення точок тіла, що обертається

Як було відзначено раніше, прямі, проведені в тілі паралельно осі обертання (наприклад, пряма *mm'* на рис. 2.2), здійснюють поступальний рух, тобто, швидкості та прискорення усіх точок кожної такої прямої будуть однакові. Отже, для вивчення кінематичних характеристик точок тіла досить визначити відповідні величини для точок перетину, проведеного перпендикулярно осі обертання.

Траєкторіями усіх точок, що не лежать на осі обертання, є кола, площини яких перпендикулярні осі обертання, а центри лежать на цій осі.

Розглянемо яку-небудь точку M тіла, що знаходиться на відстані h від осі обертання (рис. 2.2). Якщо за час dt відбувається елементарне обертання тіла на кут $d\varphi$, то точка M при цьому здійснює по своїй траєкторії елементарне переміщення $ds = h \cdot d\varphi$. Тоді числове (алгебраїчне) значення швидкості точки відповідно до формули (1.19) буде

$$V_\tau = \frac{ds}{dt} = h \cdot \frac{d\varphi}{dt} \text{ або } V = h\omega. \qquad (2.10)$$

Таким чином, алгебраїчне значення величини швидкості точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від цієї точки до осі обертання. Вектор швидкості $\overline{V}$ спрямований за дотичною до описуваного точкою кола (або перпендикулярно площині *П*, що проходить через вісь обертання і точку M, або перпендикулярно прямої MP, що з'єднує точку M з віссю обертання) за напрямом руху, що збігається з напрямом дугової стрілки кутової швидкості (рис. 2.2).

Вектори швидкостей усіх точок перерізу, перпендикулярного до осі обертання, будуть розташовуватися в його площині, утворюючи поле швидкостей, вид якого зображений на рис. 2.4.

Відзначимо, що:

1) вектори швидкостей точок перпендикулярні прямим, що з'єднують точки з віссю обертання, і спрямовані у бік обертання тіла (дугової стрілки ω);

2) модулі швидкостей точок тіла, що обертається, пропорційні їх відстаням від осі обертання.

Швидкість $\overline{V}$ точки тіла, що обертається, іноді називають лінійною або коловою на відміну від кутової швидкості тіла.

Для знаходження прискорення точки M скористаємося формулами $a_\tau = dV_\tau / dt, \quad a_n = V^2 / \rho$. Підставляючи до них значення V з рівності (2.10) і з урахуванням того, що в нашому випадку $\rho = h$, одержимо: $a_\tau = h\dot{\omega}, \quad a_n = h^2\omega^2 / h$ або остаточно:

$$a_\tau = h\varepsilon, \quad a_n = h\omega^2. \qquad (2.11)$$

Дотична складова прискорення $\overline{a}_\tau$ спрямована по дотичній до траєкторії точки у бік дугової стрілки кутового прискорення ε, нормальна складова $\overline{a}_n$ спрямована по радіусу *MP* до осі обертання (рис. 2.5).

Повне прискорення точки *M* буде

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n \, ,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \text{ або } a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \, . \qquad (2.12)$$

Відхилення вектора $\overline{a}$ від радіуса описуваного точкою кола (від нормалі до траєкторії) визначається кутом μ, що обчислюється за формулою (1.25) $tg\mu = a_\tau / a_n$ і, застосувавши рівняння (2.11), одержимо

$$tg\mu = \varepsilon / \omega^2 \, . \qquad (2.13)$$

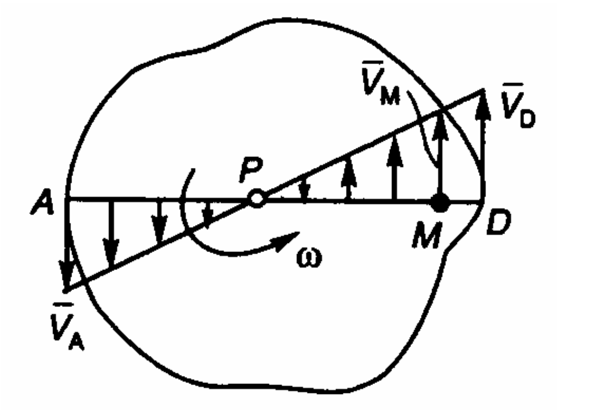


Рис. 2.4

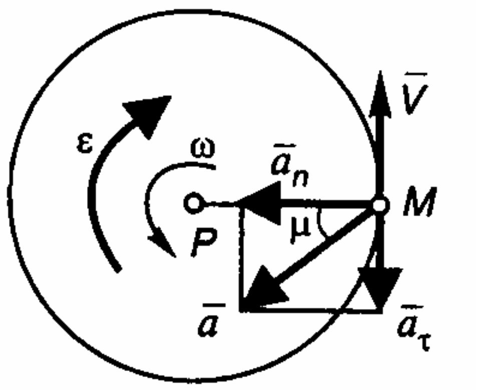


Рис. 2.5

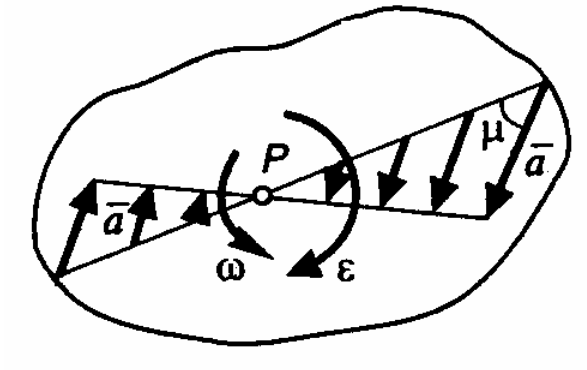


Рис. 2.6

Зазначимо, що при обчисленні кінематичних характеристик різних точок тіла, що обертається, в формули (2.12), (2.13) для даного моменту часу будуть підставлятися тіж самі значення величин ω і ε, оскільки вони є характеристиками руху всього тіла. Звідси випливає, що в даний момент часу кут μ для векторів прискорень усіх точок однаковий, а модулі прискорень точок пропорційні їх відстаням від осі обертання.

Поле прискорень точок тіла показано на рис. 2.6.

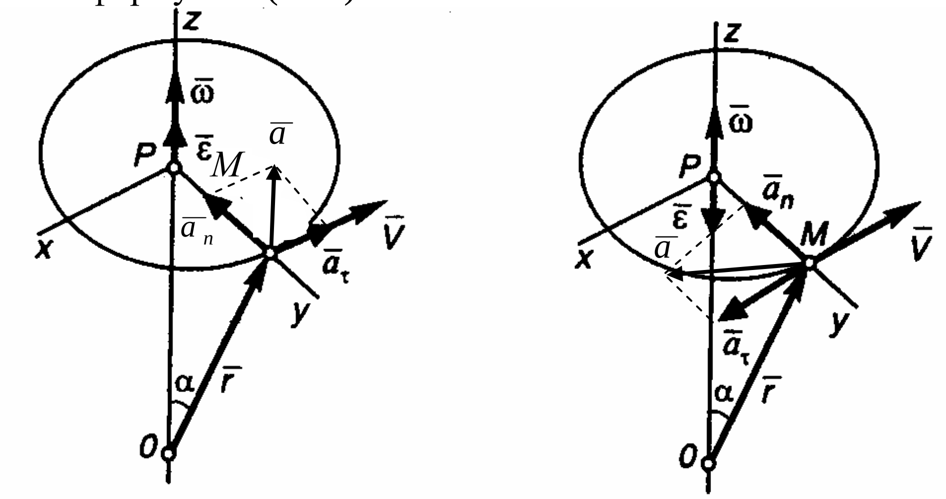
Приведемо також векторні вирази швидкості та прискорення точки тіла, що обертається.

Нехай тіло здійснює обертальний рух і в даний момент часу відомі характеристики його руху $\overline{\omega}$ і $\overline{\varepsilon}$ (рис. 2.7). З довільної точки О осі обертання проведемо радіус-вектор $\overline{r}$ точки M (враховуючи $\angle MPO = 90^0$ і $MP = h = r\sin\alpha$).

З побудови на рис. 2,7,а випливає, що вектор швидкості будь-якої точки тіла, що обертається, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості тіла на радіус-вектор цієї точки (формула Ейлера):

$$\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}\,. \qquad (2.14)$$

Модуль цього вектора $|V| = |\omega| r \sin\alpha = |\omega| h$ збігається з раніше отриманим за формулою (2.10).



а) б)

Рис. 2.7

Вектор прискорення точки M визначимо як похідну вектора швидкості за часом:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d(\overline{\omega} \times \overline{r})}{dt} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt}$$

або

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{V}\,. \qquad (2.15)$$

Формулу (2.15) називають формулою Ривальса, з якої випливає, що вектор прискорення точки $\overline{a}$ дорівнює векторній сумі двох векторів. Перший доданок $\overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ називають *обертальною* складовою прискорення. При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектор $\overline{\varepsilon} \times \overline{r}$ спрямований по дотичній до траєкторії точки M, тому його позначимо $\overline{a}_\tau$, а його модуль буде $|\overline{\varepsilon} \times \overline{r}| = \varepsilon r \sin\alpha = \varepsilon h$. Другий доданок у формулі (2.15) називають *доосьовою* складовою прискорення. При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектор добутку $\overline{\omega} \times \overline{V}$ спрямований уздовж MP, тобто вздовж головної нормалі до траєкторії точки M (позначимо його в цьому випадку $\overline{a}_n$), а його модуль буде

$$|\overline{\omega} \times \overline{V}| = \omega V \sin 90^0 = \omega \cdot \omega h = \omega^2 h\,.$$

З урахуванням формул (2.11), (2.15) робимо висновок, що

$$\overline{a}_\tau = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}, \quad \overline{a}_n = \overline{\omega} \times \overline{V}, \quad \overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n . \qquad (2.16)$$

Формули (2.16) є векторними виразами дотичного, нормального і повного прискорень точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Розташування цих векторів показано на рис. 2.7,а – при прискореному обертанні, рис. 2.7,б – при сповільненому обертанні).

2.3. Перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої осі

Таке перетворення обертальних рухів дуже широко розповсюджене в техніці. Якщо осі обертання паралельні чи перетинаються, то обертання можна передати за допомогою зубчастих або фрикційних передач. При цьому зчепленя може бути як зовнішнім (рис. 2.8,а,в), так і внутрішнім (рис. 2.8,б,г).

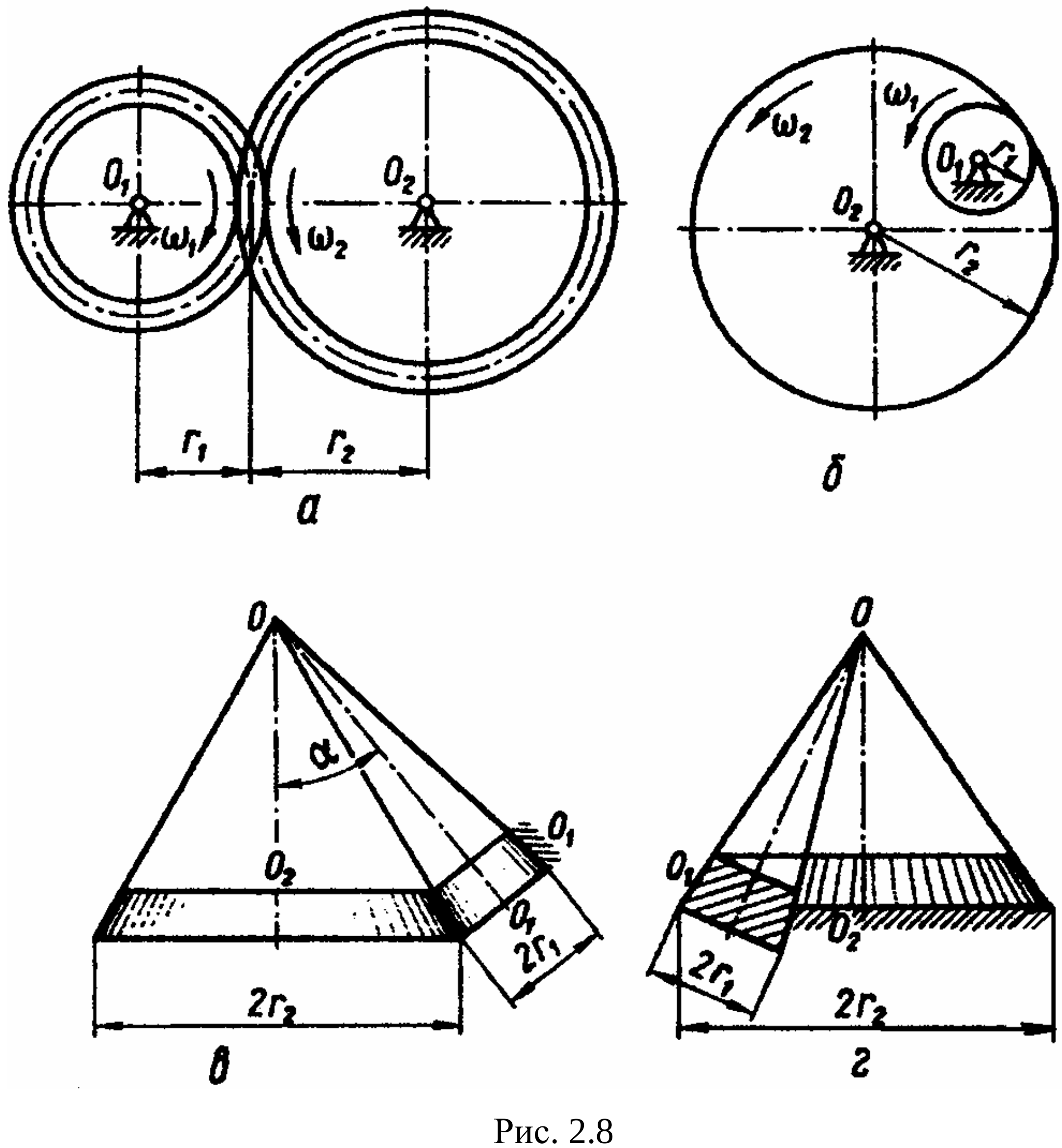


Рис. 2.8

Перетворення обертальних рухів з паралельними осями можна реалізувати також і за допомогою пасових або ланцюгових передач. При цьому пасова передача із неперехресним рухом паса (рис. 2.9,а) еквівалентна внутрішньому зубчастому або фрикційному зчепленню, а з перехресним рухом паса (рис. 2.9,б) – зовнішньому зчепленню. При передачі обертання від одного тіла до іншого перше тіло називають ведучим, друге – веденим, а весь механізм називають передавальним.

Основною для кінематичного розрахунку цих передач (рис. 2.8, 2.9), є припущення, що в системі немає ковзання, зазорів між зубцями коліс, а паси і ланцюги не деформуються. Це означає, що швидкості на ободі зубчастих коліс, які знаходяться в зчепленні, та швидкості на ободах шківів пасових і ланцюгових передач однакові. Тобто в цих випадках має місце співвідношення

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 . \qquad (2.17)$$

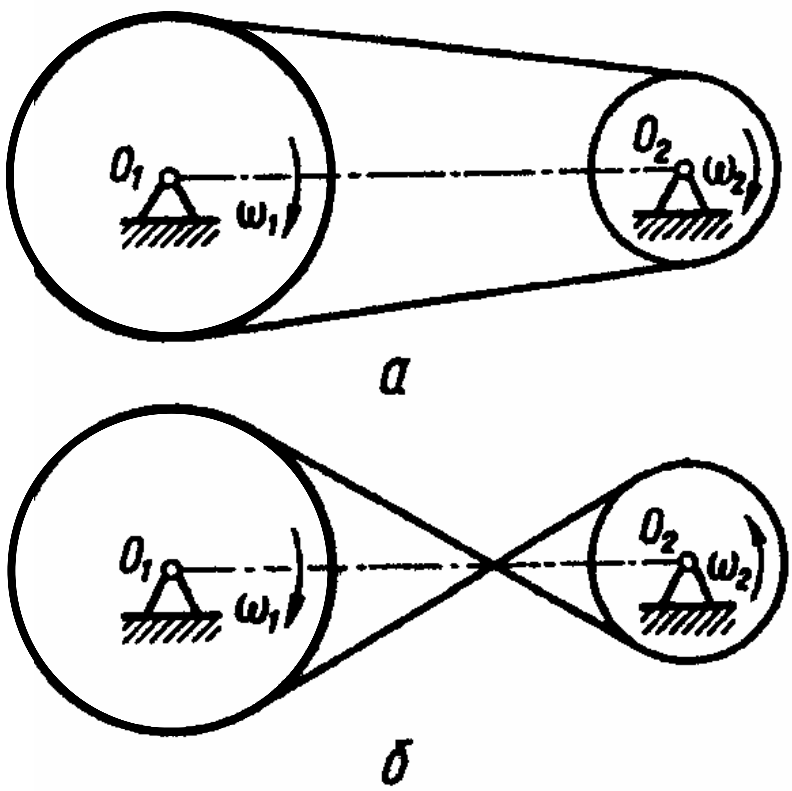


Рис. 2.9

Отже, кутові швидкості коліс зубчастих, фрикційних, а також пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} . \qquad (2.18)$$

Відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса називають передаточним числом:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \qquad (2.19)$$

Якщо врахувати, що число зубців пропорційно довжинам кіл, а значить і радіусам, то передаточне число можна визначити через відповідне відношення числа зубців:

$$i = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (2.20)$$

2.4. Приклади розв’язання задач

Задача 1. Маховик, що робить n = 60 об/хв, після вимикання двигуна ($t_0 = 0$) обертається рівносповільнено і зупиняється через $t_2 = 20$ с. Визначи-ти, скільки обертів зробив маховик до повної його зупинки, а також швидкість і прискорення точки, що лежить на ободі маховика радіуса R = 0,4 м, через t_1 = 10 с після вимикання двигуна.

***Розв’язання*.** Оскільки маховик обертається рівносповільнено, то для нього, вважаючи при $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, справедливі такі залежності:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Початкова кутова швидкість дорівнює $\omega_0 = \pi n / 30 = 2\pi$ рад.с$^{-1}$.

У момент зупинки при $t_2 = 20$ с кутова швидкість маховика ω_2 = 0. Підставляючи ці значення в друге з отриманих рівнянь, визначимо кутове прискорення маховика (ця величина під час розглянутого руху постійна):

$$0 = \omega_0 + \varepsilon t_2 \text{ або } 0 = 2\pi + \varepsilon \cdot 20, \text{ відкіля } \varepsilon = -0{,}1\pi \text{ рад. с}^{-2}.$$

Якщо позначити через N число обертів, зроблених маховиком за час $t_2 = 20$ с, то кут повороту за той же час буде дорівнювати $\varphi_2 = 2\pi N$. Підставивши знайдені значення ε і ω_0 у перше з отриманих рівнянь, одержимо

$$2\pi N = 2\pi t_2 + (-0{,}1\pi)t_2^2 / 2,$$

відкіля, з урахуванням значення t_2 = 20 с, знайдемо N = 10 об.

Для визначення в момент часу t_1 = 10 с швидкості та прискорення точки, що лежить на ободі маховика, необхідно визначити ще кутову швидкість ω_1. Використовуючи друге рівняння, одержимо:

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1 \text{ або } \omega_1 = 2\pi - 0{,}1\pi \cdot 10 = \pi \text{ рад·с}^{-1}.$$

Визначимо швидкість та прискорення точки на ободі маховика:

$$V = \omega_1 R = \pi \cdot 0{,}4 = 1{,}26 \text{ м/с};$$

$$a_\tau = |\varepsilon| R = 0{,}1\pi \cdot 0{,}4 = 0{,}126 \text{ м/с}^2; \quad a_n = V^2 / R = 1{,}26^2 / 0{,}4 = 3{,}97 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}126^2 + 3{,}97^2} = 3{,}97 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: N = 10 об; V = 1,26 м/с; a = 3,97 м/с^2.

Задача 2. У механізмі, зображеному на рис. 2.10, обертання колеса 1 радіуса R_1 передається на двоступінчасте колесо 2 радіуса R_2 за допомогою пасової передачі; вантаж 3 прив'язаний до кінця нитки, намотаної на ступінь меншого діаметра r_2 колеса 2. Закон обертання колеса 1 $\varphi_1 = 5t - t^2$, радіуси R_1 =4 см, R_2 = 8 см, r_2 = 6 см. Визначити: $\bar{V}_B, \bar{a}_B, \bar{V}_D, \bar{a}_D$ у момент часу t_1 = 2 с.

Розв'язання. У розглянутому механізмі колеса 1, 2 з'єднані пасом і здійснюють обертальні рухи. Частини паса, що охоплюють колеса (дуга $K_1K'_1$ на колесі 1 і дуга $K_2K'_2$ на колесі 2), здійснюють разом з ними обертальний рух; частини паса K_1K_2 і $K'_1K'_2$ рухаються поступально. Відрізок DE нитки, як і вантаж 3, рухається поступально.

Визначаємо спочатку кутові швидкості колес 1, 2 і швидкості точок D (вантажу 3), B (колеса 2). Знаючи закон обертання колеса 1, знаходимо його кутову швидкість

$$\omega_1(t) = \dot{\varphi}_1(t) = 5 - 2t. \qquad (1)$$

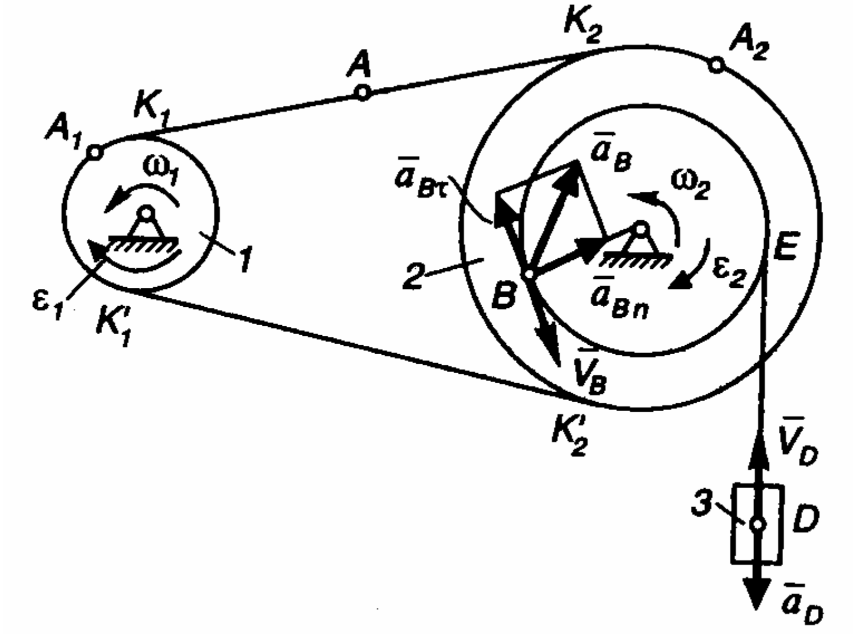


Рис. 2.10

Вважаючи, що пас по ободу колес не ковзає, одержимо, що швидкості всіх точок паса і, отже, точок на ободах охоплених пасом кожного з колес, у даний момент часу чисельно однакові, тобто

$$V_{A1} = V_A = V_{A2}.$$

Але швидкості точок A_1 і A_2 можна виразити через кінематичні характеристики руху колес 1 і 2 таким чином: $V_{A1} = \omega_1 R_1, V_{A2} = \omega_2 R_2$. Підставивши ці вирази в попереднє рівняння, одержимо

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2, \qquad (2)$$

звідси знаходимо $\omega_2 = \omega_1 R_1 / R_2$.

У момент часу $t_1 = 2$ с одержимо $\omega_1 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$ рад·с$^{-1}$, $\omega_2 = 1 \cdot 4/8 = 0{,}5$ рад·с$^{-1}$.

Оскільки $V_D = V_B = \omega_2 r_2$, то при $t_1 = 2$ с одержимо $V_D = V_B = 0{,}5 \cdot 6 =$ $= 3$ см/с. Зображуємо на рис. 2.10 вектори $\overline{V}_D$ і $\overline{V}_B$.

Для визначення прискорень точок *B*, *D* встановимо залежність між кутовими прискореннями колес 1, 2, зв'язаних пасовою передачею. Оскільки рівність (2) справедлива для будь-якого моменту часу, то, беручи похідну від обох її частин, одержимо:

$$\frac{d\omega_1}{dt} R_1 = \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \text{ або } \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 R_2 \text{ або } \varepsilon_2 = \varepsilon_1 R_1 / R_2 . \qquad (3)$$

Знаходимо далі $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1(t) = -2$ рад·с$^{-2}$. Для моменту часу $t_1 = 2$ с одержимо також $\varepsilon_2 = -2 \cdot 4/8 = -1$ рад·с$^{-2}$.

На рис. 2.10 для моменту часу $t_1 = 2$ с величини ω і ε кожного колеса зображено дуговими стрілками відповідно до знаків їх числових значень.

Визначаємо прискорення точки *B*: $\overline{a}_B = \overline{a}_{B\tau} + \overline{a}_{Bn}$, де чисельно $a_{B\tau} = |\varepsilon_2| r_2$, $a_{Bn} = \omega_2^2 r_2$. Тоді для моменту часу $t_1 = 2$ с одержимо $a_{B\tau} = 1 \cdot 6 = 6$ см/с^2, $a_{Bn} = 1{,}5$ см/с^2, $a_B = \sqrt{a_{B\tau}^2 + a_{Bn}^2} = \sqrt{6^2 + 1{,}5^2} = 6{,}18$ см/с^2.

Прискорення точки *D* чисельно дорівнює дотичному прискоренню точки *B*: $a_D = a_{B\tau} = 6$ см/с^2.

Вектори прискорень точок *B* и *D* зображуємо на рис. 2.10.

Відповідь: $V_B = V_D = 3$ см/с, $a_B = 6{,}18$ см/с^2, $a_D = 6$ см/с^2.

2.5. Питання для самостійної роботи

1. Швидкості та прискорення двох точок тіла за весь час його руху однакові за модулями і напрямами. Чи можна стверджувати, що дане тіло рухається поступально?

2. Траєкторії всіх точок тіла є колами. Чи можна стверджувати, що тіло здійснює обертальний рух; поступальний рух?

3. Тіло обертається рівномірно. Чи можна стверджувати, що для всіх його точок $\overline{V} = const$?

4. Прискорення яких точок тіла, що обертається: а) мають рівні модулі; б) мають однакові напрями; в) однакові за модулем і напрямом?

5. Чи можливо таке обертання тіла навколо нерухомої осі, при якому вектори швидкості та прискорення довільної точки тіла взаємно перпендикулярні? Спрямовані по одній прямій?

6. Чи можна визначити, що обертання тіла прискорене або уповільнене, за знаком тільки ω або тільки ε?

7. Вектор прискорення точок диска, що обертається, спрямований під кутом $\mu = 45^0$ до його радіуса. Яке співвідношення між модулями кутової швидкості та кутового прискорення цього диска?

8. Як перевести кутову швидкість, яка виражена в об/хв, у рад/с?

9. Як спрямовані вектори кутової швидкості і кутового прискорення при сповільненому та прискореному обертаннях?

3. ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

3.1. Рівняння та характеристики плоскопаралельного руху тіла

Плоскопаралельним (або плоским) називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки рухаються у площинах, паралельних деякій площині, нерухомій в розглянутій системі відліку.

При такому русі тіла будь-яка пряма, перпендикулярна нерухомій площині *П* (наприклад, прямі aa', bb' на рис. 3.1), буде здійснювати поступальний рух, отже, всі кінематичні характеристики точок, що лежать на цій прямій, будуть тотожні. Звідси робимо висновок, що для вивчення руху всього тіла досить досліджувати як рухається в площині *Oxy* переріз цього тіла, що утворює деяку плоску фігуру. Тут площина *Oxy* є нерухомою і паралельною площині *П*.

Положення плоскої фігури в площині *Oxy* визначається положенням будь-якого проведеного на цій фігурі відрізка *AB* (рис. 3.2). У свою чергу, положення відрізка *AB* визначається, наприклад, координатами x_A, y_A точки *A* та величиною кута φ між відрізком *AB* і віссю *x*. Точку *A*, яку вибрано для визначення положення плоскої фігури, називають *полюсом*.

Закон руху плоскої фігури в її площині, а отже, і плоскопаралельного руху твердого тіла щодо системи координат *Oxy* визначається трьома рівняннями:

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t). \tag{3.1}$$

Аналізуючи залежності (3.1), можна зробити висновок, що рух плоскої фігури в її площині є сукупність двох рухів: поступального руху, при якому всі точки рухаються так само, як і полюс А, і обертального руху навколо цього полюса (при цьому фігура обертається навколо осі, що проходить через точку *A* перпендикулярно площині *П*).

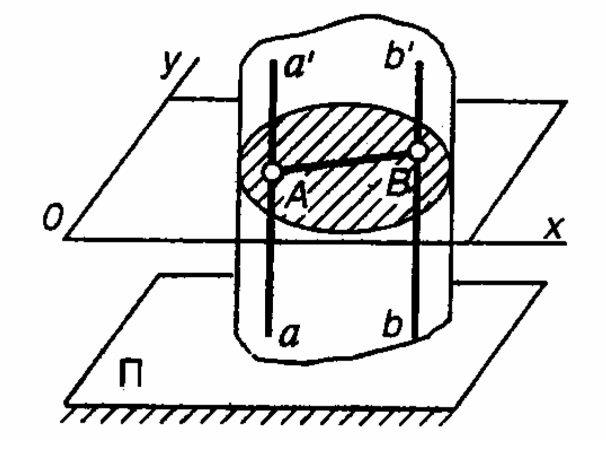


Рис. 3.1

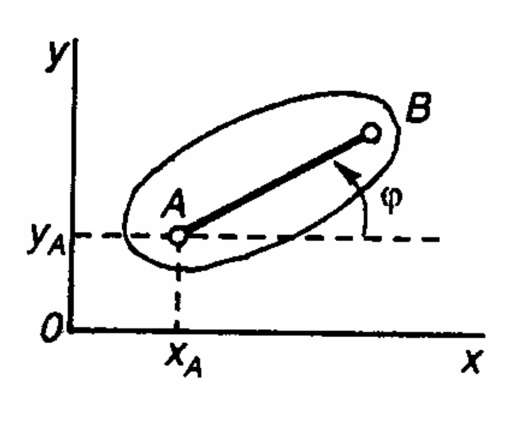


Рис. 3.2

Основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла є швидкість і прискорення полюса ($\bar{V}_A, \bar{a}_A$ – характеристики поступальної складової руху), а також кутова швидкість і кутове прискорення тіла ($\omega, \varepsilon -$ характеристики обертальної складової руху).

За полюс можна вибирати будь-яку точку фігури. При зміні точки, вибраної за полюс, характеристики поступальної складової руху змінюються (швидкість і прискорення іншої точки фігури в загальному випадку будуть відрізнятися від $\bar{V}_A$ і $\bar{a}_A$), а характеристики обертальної складової руху ω і ε залишаються незмінними (оскільки яка-завгодно пряма перерізу, паралельного площині Π при плоскопаралельному русі твердого тіла повертається на один і той же кут).

3.2. Визначення швидкостей точок плоскої фігури

Нагадаємо, що рух плоскої фігури можна розглядати як складову з поступального руху разом з полюсом і обертального руху навколо полюса.

Відповідно до цього швидкість довільної точки М плоскої фігури геометрично складається із швидкості будь-якої точки А, що прийнята за полюс, і швидкості, яку точка M одержує при обертанні фігури навколо цього полюса, тобто

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}. \quad (3.2)$$

При цьому швидкість $\bar{V}_{MA}$ визначається за величиною і напрямом так само, якщо б тіло здійснювало обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку A, тобто

$$\bar{V}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM}, \quad \text{де} \quad V_{MA} = \omega \cdot AM, \; \bar{V}_{MA} \perp \overline{AM}. \quad (3.3)$$

Таким чином, якщо відомі швидкість полюса $\bar{V}_A$ і кутова швидкість тіла ω, то швидкість будь-якої точки M тіла визначається, відповідно до рівняння (3.2), діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\bar{V}$ і $\bar{V}_{MA}$, як на сторонах (рис. 3.3), а модуль швидкості V_M обчислюється за формулою:

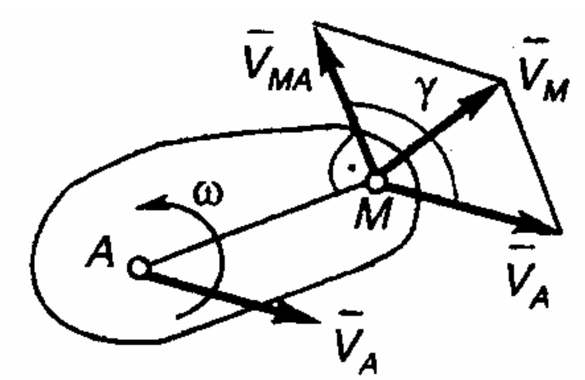


Рис. 3.3

$$V_M = \sqrt{V_A^2 + V_{MA}^2 + 2V_A \cdot V_{MA} \cdot \cos\gamma}, \qquad (3.4)$$

де $\gamma -$ кут між векторами $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_{MA}$.

3.2.1. Теорема про проекції швидкостей двох точок твердого тіла

Відповідно до рівняння (3.2) для двох довільних точок *A* і *B* твердого тіла справедлива формула $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}$, відповідно до якої виконуємо побудову, зображену на рис. 3.4. Проектуючи обидві частини цього рівняння на вісь *Ax*, проведену через точки *A* і *B* по відрізку *AB*, і, з урахуванням, що вектор $\overline{V}_{BA}$ перпендикулярний до прямої *AB*, знаходимо

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha. \qquad (3.5)$$

З рівняння (3.5) виходить теорема: *проекції швидкостей двох точок твердого тіла на вісь, яка проходить через ці точки, рівні між собою.*

Природно, що рівність проекцій векторів означає рівність цих проекцій за їх модулем і знаком.

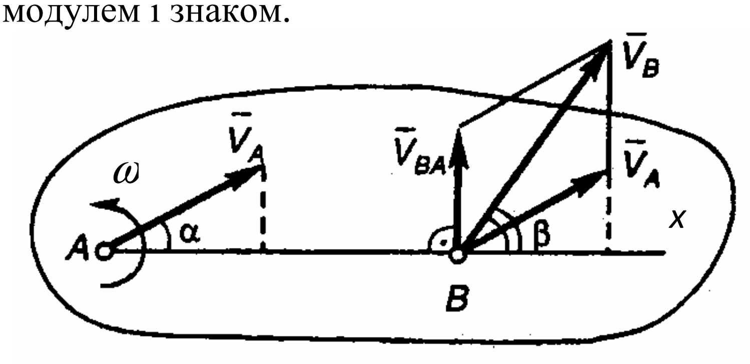


Рис. 3.4

3.2.2. Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центра швидкостей (МЦШ)

Для визначення швидкостей точок плоскої фігури виберемо за полюс будь-яку точку *P*. Тоді відповідно до формули (3.2) швидкість довільної точки *M* визначається як сума двох векторів $\overline{V}_P$ і $\overline{V}_{MP}$:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_P + \overline{V}_{MP}, \quad \text{де} \quad V_{MP} = \omega \cdot MP, \ \overline{V}_{MP} \perp \overline{MP}.$$

Якби виявилося, що швидкість полюса *P* в даний момент часу дорівнює нулю, то права частина цього рівняння була б представлена одним доданком $\overline{V}_{MP}$, а швидкість будь-якої іншої точки визначалася б як її лінійна швидкість при обертанні тіла навколо полюса *P:*

$$V_M = \omega \cdot MP, \quad \overline{V}_M \perp \overline{MP}. \qquad (3.6)$$

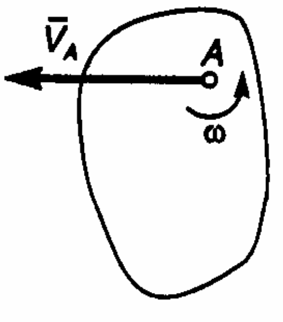
Отже, якщо вибрати за полюс точку *P*, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, то модулі швидкостей усіх інших точок фігури будуть пропорційні їхнім відстаням від полюса *P*, а напрями векторів швидкостей цих точок будуть перпендикулярні до прямих, що з'єднують розглянуту точку і полюс *P*. Очевидно, що розрахунок швидкостей точок за формулою (3.6) значно простіше розрахунку за загальною формулою (3.2).

Точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається *миттєвим центром швидкостей (МЦШ)*. Легко переконатися, що якщо фігура рухається непоступально, то така точка в кожний момент часу існує і при цьому єдина. Розглянемо способи визначення положення миттєвого центру швидкостей.

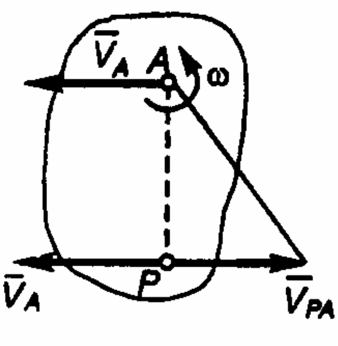
Спосіб 1. Нехай у момент часу t для плоскої фігури відомі її кутова швидкість ω і швидкість $\overline{V}_A$ будь-якої її точки *A* (рис. 3.5,а). Тоді, вибираючи точку *A* за полюс, швидкість шуканої нами точки *P* можна визначити за формулою $\overline{V}_P = \overline{V}_A + \overline{V}_{PA}$.

Задача полягає в тому, щоб знайти таку точку *P*, а лінійна швидкість якої $\overline{V}_P = 0$, а отже, $\overline{V}_A + \overline{V}_{PA} = 0$ і звідси $\overline{V}_{PA} = -\overline{V}_A$. Тоді для точки *P* швидкість $\overline{V}_{PA}$, яку точка *P* отримує при обертанні фігури навколо полюса *A*, і швидкість $\overline{V}_A$ полюса *A* будуть рівні за модулем ($V_{PA} = V_A$) і протилежні за напрямом. Крім того, точка *P* повинна лежати на перпендикулярі до вектора швидкості $\overline{V}_A$. Визначення положення точки *P*, що відповідає зазначеним умовам, здійснюється такою побудовою: з точки *A* (рис. 3.5,б) опустимо перпендикуляр до вектору $\overline{V}_A$ і відкладемо на ньому відстань $AP = V_A / \omega$ у той бік від точки *A*, куди «вказує» вектор $\overline{V}_A$, якщо його повернути в напрямку дугової стрілки ω на 90^0.

Відзначимо, що миттєвий центр швидкостей може бути розташований як на самій фігурі, так і на її уявному продовженні (тобто поза фігурою). Миттєвий центр швидкостей є єдиною точкою плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. В інший момент часу миттєвим центром швидкостей буде вже інша точка плоскої фігури.



а)



б)

Рис. 3.5

Спосіб 2. Якщо відомі напрямки швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$ двох точок *A* і *B* плоскої фігури, то миттєвий центр швидкостей буде знаходитися в точці перетину перпендикулярів, опущених з точок *A* і *B* до векторів їх швидкостей. Така побудова виконана на рис. 3.6. Вона обгрунтована тим, що для будь-яких точок *A* і *B* фігури застосовані положення (3.6):

$$V_A = \omega \cdot AP,\ \overline{V}_A \perp \overline{AP}\ \text{і}\ V_B = \omega \cdot BP,\ \overline{V}_B \perp \overline{BP}.$$

З цих рівностей випливає, що

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \qquad (3.7)$$

Отже, якщо МЦШ визначено, то швидкості точок плоскої фігури визначаються, начебто ця фігура в даний момент часу обертається навколо миттєвого центра швидкостей (точки Р).

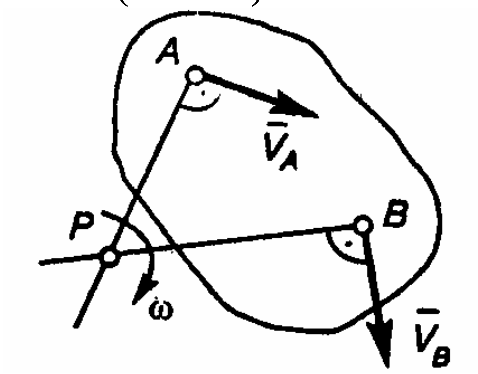
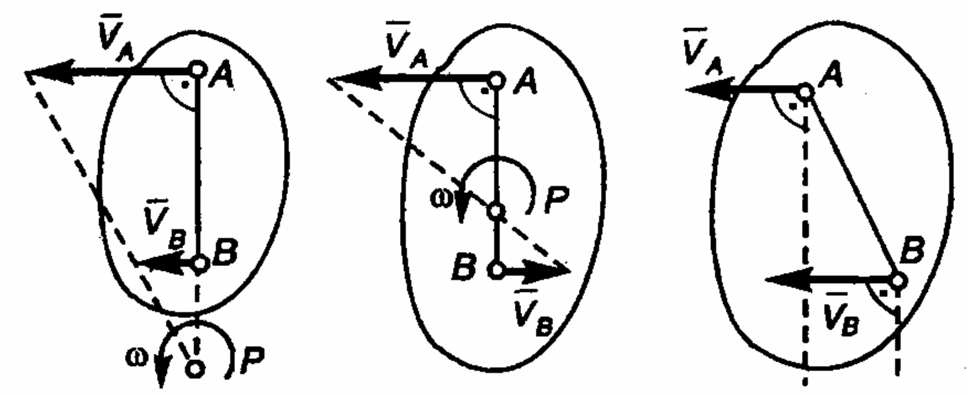


Рис. 3.6

Спосіб 3. Якщо швидкості точок *A* і *B* плоскої фігури паралельні одна одній, то можливі три варіанти зображені на рис. 3.7.

При цьому у випадку, коли швидкості точок *A* і *B* паралельні й пряма *AB* не перпендикулярна до $\overline{V}_A$ (рис. 3.7, в), то миттєвий центр швидкостей знаходиться в нескінченності *($AP = \infty$)*, тобто фактично не існує, а кутова швидкість обертання фігури $\omega = V_A / AP = V_A / \infty = 0$. Тут швидкості всіх точок фігури в даний момент часу дорівнюють одна одній і фігура має розподіл швидкостей як при поступальному русі. Такий стан руху тіла називають *миттєво поступальним*.



а) б) в)

Рис. 3.7

Спосіб 4. Якщо плоский рух тіла здійснюється шляхом кочення без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 3.8), то точка дотику *P* буде миттєвим центром швидкостей.

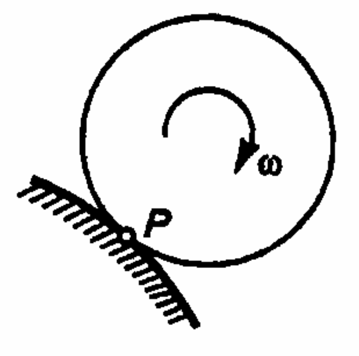


Рис. 3.8

3.3. Визначення прискорень точок плоскої фігури

Прискорення будь-якої точки *M* плоскої фігури геометрично складається з прискорення будь-якої точки *A*, прийнятої за полюс, і прискорення, що точка *M* отримує при обертанні фігури навколо цього полюса, тобто

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}, \tag{3.8}$$

$$a_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \tag{3.9}$$

де ω, ε – кутова швидкість і кутове прискорення фігури.

При розв'язанні задач зручніше вектори в правій частині рівняння (3.8) представити як суми дотичних і нормальних складових. Тоді отримаємо

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n, \tag{3.10}$$

де $\bar{a}_A^\tau, \bar{a}_A^n$ – дотичне і нормальне прискорення точки *A*; $\bar{a}_{MA}^\tau$, $\bar{a}_{MA}^n$ – дотична і нормальна складова прискорення $\bar{a}_{MA}$ точки *M* при її обертанні разом з тілом навколо полюса *A*.

При цьому модулі векторів $\bar{a}_{MA}^\tau$ і $\bar{a}_{MA}^n$, як прискорення точки тіла, що обертається, визначаються відповідно до формул (2.11):

$$a_{MA}^\tau = MA \cdot \varepsilon; \quad a_{MA}^n = MA \cdot \omega^2. \tag{3.11}$$

Тут вектор $\bar{a}_{MA}^\tau$ спрямований перпендикулярно *MA* у бік дугової стрілки ε, а вектор $\bar{a}_{MA}^n$ спрямований від точки *M* до полюсу *A*.

Якщо точка *M* рухається криволінійно, то вектор $\bar{a}_M$ в лівій частині рівності (3.10) треба замінити сумою складових за напрямом координатних осей: $\bar{a}_{Mx}$ і $\bar{a}_{My}$.

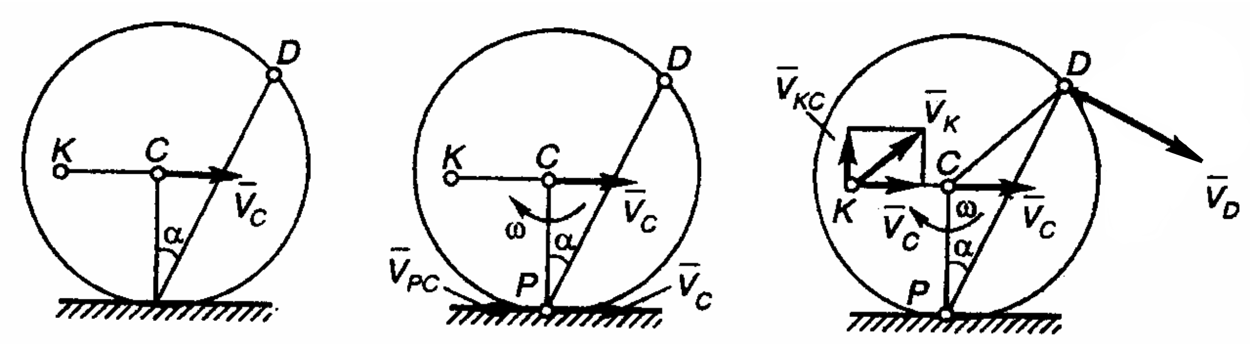
Подальші особливості використання рівняння (3.10) розглянемо при розв'язанні конкретних задач.

3.4. Приклади розв’язання задач по визначенню швидкостей точок тіла

Задача 1. Колесо радіуса R котиться по нерухомій поверхні без ковзання (рис. 3.9, а). Знайти швидкість точок K і D колеса, якщо відомі швидкість $\overline{V}_C$ центра C колеса та відстань $KC = b$ і кут α.

Розв’язання. Розглянутий рух колеса за визначенням є плоскопаралельним. Прийнявши точку C за полюс (оскільки її швидкість відома) відповідно до загального рівняння (3.2) для точки K матимемо

$$\overline{V}_K = \overline{V}_C + \overline{V}_{KC}, \quad \text{де} \quad \overline{V}_{KC} \perp \overline{KC},\ V_{KC} = \omega \cdot KC.$$



а) б) в)

Рис. 3.9

Для визначення кутової швидкості ω розглянемо лінійну швидкість точки P дотику колеса з нерухомою поверхнею (рис. 3.9,б). Для цієї точки можна записати рівняння

$$\overline{V}_P = \overline{V}_C + \overline{V}_{PC}, \quad \text{де} \quad \overline{V}_{PC} \perp \overline{PC},\ V_{PC} = \omega \cdot PC.$$

Особливістю точки P є те, що в даний момент часу її швидкість $V_P = 0$, оскільки колесо котиться без ковзання. Тоді отримане рівняння дає вираз

$$0 = \overline{V}_C + \overline{V}_{PC}.$$

Звідси випливає наступне: 1) швидкості $\overline{V}_{PC}$ і $\overline{V}_C$ повинні бути спрямовані в протилежні сторони; 2) з рівності модулів $V_{PC} = V_C$ одержуємо $\omega \cdot PC = V_C$, звідси знайдемо величину $\omega = \dfrac{V_C}{PC} = \dfrac{V_C}{R}$. Відповідно до напряму вектора $\overline{V}_{PC}$ визначаємо напрям ω і зображуємо його на кресленні.

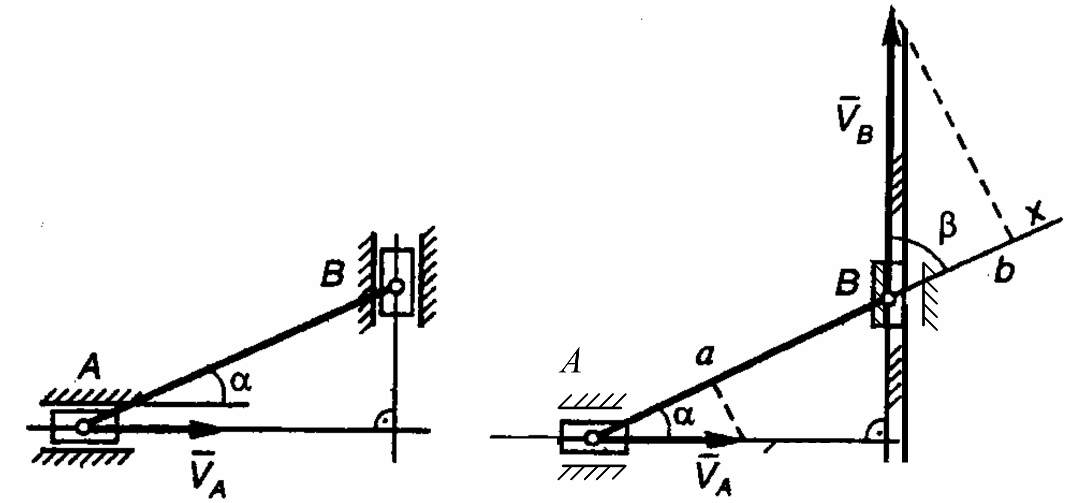
Тепер повертаємося до визначення V_k. Знаходимо $V_{KC} = \omega \cdot KC = \dfrac{V_C \cdot b}{R}$. Знаючи напрям кутової швидкості ω, виконуємо побудову прямокутника на векторах $\bar{V}_C$ і $\bar{V}_{KC}$ (рис. 3.9,в). Остаточно знаходимо

$$V_K = \sqrt{V_C^2 + V_{KC}^2} = V_C\sqrt{1+(b/R)^2}\ .$$

Швидкість точки D на ободі колеса визначимо за формулою (3.7), враховуючи, що точка P дотику колеса і поверхні є його МЦШ:

$$V_D = \omega \cdot DP = \frac{V_C}{R}\cdot\left(2R\cdot\cos\alpha\right) = 2V_C\cos\alpha\,,\quad \bar{V}_D \perp \overline{DP}\,.$$

Задача 2. Повзуни A і B з'єднані стержнем з шарнірами на кінцях, переміщуються по взаємно перпендикулярних напрямних (рис. 3.10,а). Визначити при даному куті α швидкість точки B, якщо відома швидкість $\bar{V}_A$.



а) б)

Рис. 3.10

Розв'язання. Проведемо вісь Ax через точки A і B. Знаючи напрям $\bar{V}_A$, знаходимо проекцію цього вектора на цю вісь: $V_{Ax} = V_A\cos\alpha$ (на рис. 3.10,б це буде відрізок Aa). Далі на схемі від точки B відкладаємо відрізок $Bb = Aa$ і, відновлюючи в точці b перпендикуляр до осі Ax, знаходимо точку C його перетину з віссю вертикальних напрямних, яка і буде визначати кінець невідомого вектора швидкості $\bar{V}_B$ точки B.

Відповідно до теореми про проекції швидкостей: $V_A\cos\alpha = V_B\cos\beta$. Звідси остаточно визначимо (врахувавши, що $\beta = 90^0 - \alpha$) $V_B = V_A\cos\alpha/\cos(90^0-\alpha)$ або $V_B = V_A ctg\alpha$.

Задача 3. Плоский механізм складається із стержнів *1, 2, 3,4* і повзуна B (рис. 3.11), з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами в точках O_1 і O_2 шарнірами; точка D знаходиться всередині стержня AB. Довжини стержнів: l_1 = 0,4 м, l_2 = 1,2 м, l_3 = 0,7 м, l_4 = 0,3 м. Кутова швидкість стержня *1* у заданому положенні механізму $\omega_1 = 2$ рад·с$^{-1}$ і спрямована проти ходу годинникової стрілки. Визначити $\bar{V}_A, \bar{V}_B, \bar{V}_D, \bar{V}_E, \omega_2, \omega_3, \omega_4$.

Розв'язання. У розглянутому механізмі стержні *1, 4* здійснюють обертальний рух відповідно навколо точок O_1 і O_2, повзун B – поступальний в своїх напрямних, а стержні *2, 3* – плоскопаралельний рух.

Швидкість точки A визначимо як приналежну стержню *1,* який здійснює обертальний рух:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}, \quad \overline{V}_A \perp \overline{O_1A}.$$

Розглянемо рух стержня *2.* Швидкість його точки A визначена, а напрям швидкості точки B співпадає з віссю напрямних, це обумовлено тим, що вона належить одночасно стержню 2 і повзуну, що рухається уздовж напрямних. Далі, відновлюючи з точок A і B перпендикуляри до $\overline{V}_A$ і напряму швидкості повзуна B, знаходимо положення точки P_2 – МЦШ стержня *2.*

За напрямом вектора $\overline{V}_A$ визначаємо напрям дугової стрілки кутової швидкості ω_2 стержня *2* і знаходимо її числову величину

$AP_2 = AB \cdot \sin 60^0 = 1{,}04$ м (одержимо при розгляді ΔAP_2B),

$$\omega_2 = V_A / AP_2 = 0{,}8/1{,}04 = 0{,}77 \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}.$$

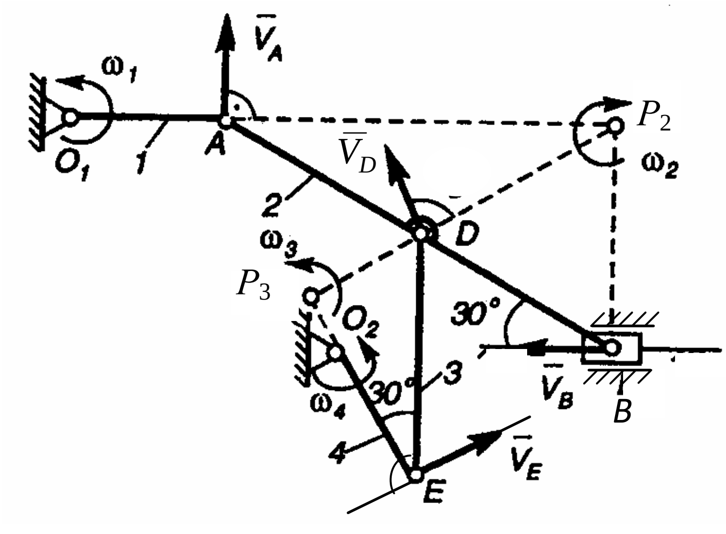


Рис. 3.11

Тепер визначаємо числові значення і напрями швидкостей точок B і D стержня *2* (з урахуванням, що ΔDP_2B – рівнобічний і $BP_2 = AB \cdot \cos 60^0 =$ $= 0{,}6$ м, а $DP_2 = BP_2 = 0{,}6$ м):

$$V_B = \omega_2 \cdot BP_2 = 0{,}62 \text{ м/с}; \; \overline{V}_B \perp \overline{P_2B};$$

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2 = 0{,}62 \text{ м/с}; \; \overline{V}_D \perp \overline{P_2D}.$$

Розглянемо далі рух стержня *3.* Швидкість точки D відома. Оскільки точка E належить одночасно і стержню *4,* що обертається навколо точки O_2, то лінія дії швидкості V_E буде перпендикулярною $\overline{O_2E}$. Тоді, відновлюючи в точках D і E перпендикуляри до швидкості $\overline{V}_D$ і лінії дії швидкості $\overline{V}_E$, знаходимо положення точки P_3 – МЦШ стержня *3*. За напрямом вектора $\overline{V}_D$ визначаємо напрям дугової стрілки кутової швидкості ω_3 стержня 3. Її чисельну величину знаходимо (попередньо визначивши з прямокутного ΔDP_3E відрізок $DP_3 = DE \cdot \sin 30^0 = 0{,}35$ м) так:

$$\omega_3 = V_D / P_3D = 1{,}77 \text{ рад·с}^{-1}.$$

Далі, обчисливши $P_3E = ED \cdot \cos 30^0 = 0{,}605$ м, визначаємо швидкість $V_E = \omega_3 \cdot P_3E = 1{,}07$ м/с; $\overline{V}_E \perp \overline{P_3E}$. За напрям дугової стрілки ω_3 визначаємо напрям вектора швидкості $\overline{V}_E$.

Розглянемо тепер рух стержня *4*, що обертається навколо точки O_2. Знаючи напрям і чисельну величину $\overline{V}_E$, знаходимо напрям і величину кутової швидкості ω_4: $\omega_4 = V_E / O_2E = V_E / l_4 = 3{,}57$ рад·с$^{-1}$.

Відповідь: $V_A = 0{,}8$ м/с, $V_B = V_D = 0{,}63$ м/с, $V_E = 1{,}07$ м/с, $\omega_2 = 0{,}77$ рад.с$^{-1}$; $\omega_3 = 1{,}77$ рад. с$^{-1}$; $\omega_4 = 3{,}57$ рад·с$^{-1}$, напрями цих величин показано на рис. 3.11.

Задача 4. Плоский механізм складається із стержнів *1,2, 3* і катка, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні (рис. 3.12,а). З'єднання стержнів між собою і стержня *3* з катком в точці D – шарнірні. Довжини стержнів: l_1 = 0,4 м, l_2 = 0,6 м, l_3 = 0,8 м. При кутах $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$, відомих величинах і напрямах кутової швидкості $\omega_1 = 2$ рад. с$^{-1}$ і швидкості центра O катка $V_0 = 0{,}346$ м/с, $\Delta ABD = 90^0$ визначити швидкість точки B і кутову швидкість ω_2 стержня 2.

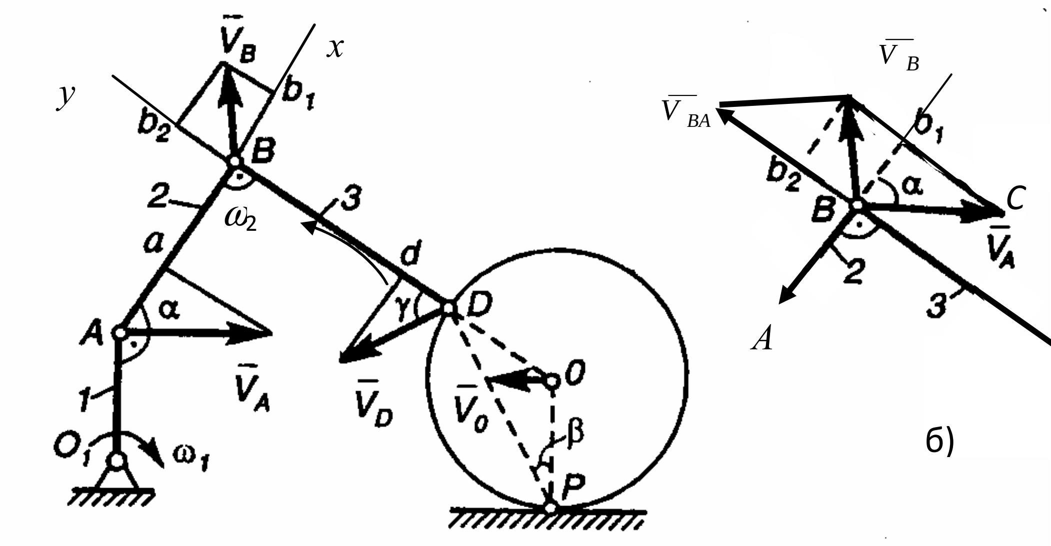
Розв'язання. Аналіз принципу дії механізму показує наступне: стержень 1 виконує обертальний навколо точки O_1 рух; стержні 2, 3, а також каток – плоскопаралельні рухи.

Розглядаючи рух стержня *1*, знаходимо напрям і величину швидкості точки *A:* $V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 0{,}8$ м/с; $\overline{V}_A \perp \overline{O_1A}$. Напрям вектора швидкості $\overline{V}_A$ визначаємо за напрямом дугової стрілки ω_1.

Розглянемо далі рух катка. Його миттєвий центр швидкостей розташований в точці P дотику катка і поверхні, тоді V_D знайдемо як

$$V_D = V_0 \cdot DP / OP.$$

Оскільки у трикутнику ΔDOP за визначенням, кут $\beta = 30^0$, то $DP = 2 \cdot OP \cdot \cos 30^0 = OP \cdot \sqrt{3}$. Тоді швидкість $V_D = V_0 \cdot DP / OP = V_0 \cdot \sqrt{3} = 0{,}6$ м/с. При цьому вектор $\overline{V}_D$ спрямований перпендикулярно DP у бік дугової стрілки ω_1 стержня 1.



а) б)

Рис. 3.12

Тому що точка B механізму належить одночасно стержням AB і BD, то за теоремою про проекції швидкостей повинно виконуватись: 1) проекція вектора $\bar{V}_B$ на вісь Ax дорівнює проекції на цю вісь вектора $\bar{V}_A$ (відрізок Aa на рис. 3.12, а), тобто $Aa = V_A \cos\alpha = 0{,}4$ м/с; 2) проекція вектора $\bar{V}_B$ на вісь Dy дорівнює проекції на цю вісь вектора $\bar{V}_D$ (відрізок Dd на рис. 3.12,а), тобто $Dd = V_D \cos\gamma = 0{,}3$ м/с ($\gamma = 60^0$ за побудовою).

Далі вирішуємо задачу графічно. Відкладаємо від точки B у відповідних напрямах відрізки $Bb_1 = Aa$ і $Bb_2 = Dd$. Відновлюємо з точки b_1 перпендикуляр до Bb_1, а з точки b_2 – перпендикуляр до Bb_2. Точка перетину цих перпендикулярів визначає кінець шуканого вектора $\bar{V}_B$.

Оскільки відрізкі Bb_1 і Bb_2 у даному випадку взаємно перпендикулярні, то

$$V_B = \sqrt{(Bb_1)^2 + (Bb_2)^2} = 0{,}5 \text{ м/с.}$$

Визначаємо ω_2. На рис. 3.12,б графічно зображено векторну рівність:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \quad \bar{V}_{BA} \perp \overline{AB},$$

де вектори $\bar{V}_A$ і $\bar{V}_B$ визначені, а за напрямом вектор $\bar{V}_{BA}$ перпендикулярний стержню AB. Зі схеми (рис. 3.12, б) знаходимо

$$V_{BA} = Bb_2 + Cb_1 = V_D \cos\gamma + V_A \sin\alpha = 0{,}3 + 0{,}693 = 0{,}993 \text{ м/с.}$$

Кінцево $\omega_2 = V_{BA} / AB = 1{,}66$ рад. с$^{-1}$ (напрям дугової стрілкі ω_2, враховуючи напрям швидкості $\bar{V}_{BA}$ – проти ходу годинникової стрілки).

Відповідь: $V_B = 0{,}5$ м/с; $\omega_2 = 1{,}66$ рад. с$^{-1}$.

3.5. Приклади розв’язання задач по визначенню прискорень точок тіла

Задача 1. Механізм (рис. 3.13) складається із стержнів *1,2* і повзуна *B*, з'єднаних один з одним і з нерухомою опорою *O* шарнірами. Стержень *1* обертається навколо точки *O* за законом $\varphi = 0{,}5(3t - t^2)$ рад. У момент часу t_1 = 1 с механізм займає положення, зображене на рис. 3.13: кути $\alpha = \beta = 30^0$, а кут $\angle OAB$ = 120^0.

Визначити для цього положення механізму швидкість $\overline{V}_B$ і прискорення $\overline{a}_B$ повзуна B, а також кутову швидкість ω_2 і кутове прискорення ε_2 стержня *2*, якщо довжини стержнів l_1 = 2 м, l_2 = 4 м.

Розв’язання. Знаходимо кутову швидкість і кутове прискорення стержня *1* як функції часу: $\omega_1 = \dot{\varphi} = 0{,}5(3 - 2t)$, $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi} = -1$. Тоді для моменту часу t_1 = 1 с одержимо $\omega_1 = 0{,}5$ рад·с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = -1$ рад·с$^{-2}$. Відповідно до знаків цих величин зображуємо їх на рис. 3.13 дуговими стрілками: ω_1 проти ходу годинникової стрілки, ε_1 – за ходом годинникової стрілки.

Визначимо швидкість точки *A* $\overline{V}_A$, розглядаючи обертальний рух стержня *1*:

$$V_A = \omega_1 l_1 = 1 \text{ м/с}, \qquad \overline{V}_A \perp \overline{OA}.$$

Кутову швидкість ω_2 стержня 2, а також швидкість його точки *B* визначимо методом МЦШ. Для цього будуємо МЦШ стержня 2, відновлюючи перпендикуляри в точках *A* і *B* до $\overline{V}_A$ і лінії швидкості точки *B* повзуна, яка співпадає з віссю напрямних останнього. Точка P_2 перетину перпендикулярів і буде МЦШ стержня 2.

З рис. 3.13 слідує, що всі кути трикутника AP_2B дорівнюють 60^0, а трикутник є рівнобічним, тому отримаємо $P_2A = P_2B = AB = 4$ м, а також

$$\omega_2 = V_A / P_2A = 0{,}25 \text{ рад. с}^{-1}, \quad V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 1 \text{м/с}.$$

Прискорення точки *A*, яка належить стержню *1*, що здійснює обертання навколо точки *O*, представимо як (3.10)

$$\overline{a}_A = \overline{a}_{A\tau} + \overline{a}_{An},$$

де числові значення

$$a_{A\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 2 \text{ м/с}^2; \qquad a_{An} = \omega_1^2 l_1 = 1 \text{ м/с}^2.$$

Тут вектор $\overline{a}_{An}$ спрямований уздовж *AO* від точки *A* до точки *O*, а $\overline{a}_{A\tau}$ перпендикулярний *AO* і спрямований у напряму дугової стрілки ε_1.

Оскільки точка *B* цього стержня одночасно належить і повзуну, що рухається у напрямних прямолінійно, то вектор $\overline{a}_B$ належить осі напрямним повзуна. Зображуємо вектор $\overline{a}_B$ на схемі, припускаючи, що він спрямований у той же бік, що і $\overline{V}_B$.

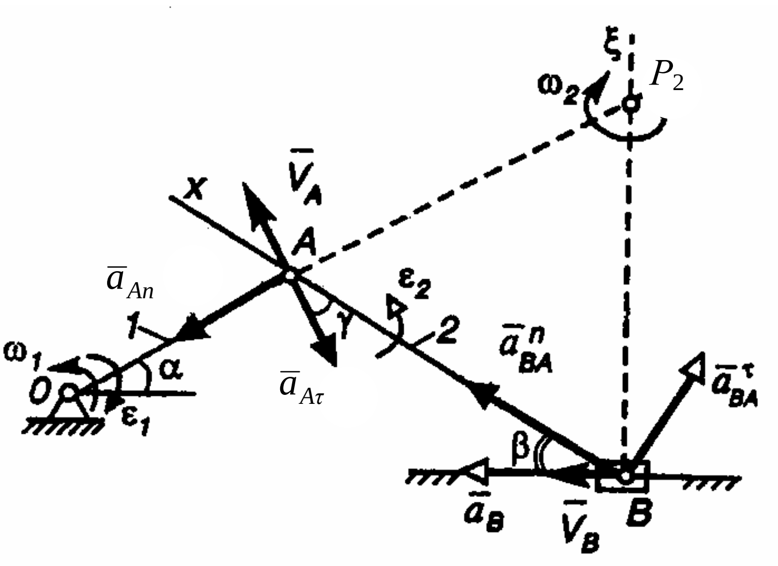


Рис. 3.13

Для визначення прискорення $\bar{a}_B$ приймемо точку A як полюс і скористаємося формулою (3.10)

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}^{\tau}_{BA} + \bar{a}^{n}_{BA}.$$

Зображуємо на схемі вектор $\bar{a}^{n}_{BA}$ (уздовж відрізка BA від точки B до точки A) і знаходимо його числове значення (3.11)

$$a^{n}_{BA} = \omega_2^2 l_2 = 0{,}25 \text{ м/с}^2.$$

Числове значення $\bar{a}^{\tau}_{BA}$, відповідно до (3.11), могло б бути визначено як $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon_2 l_2$, але у даному випадку кутове прискорення ε_2 невідомо. Для вектора $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ можемо вказати на кресленні його напрям (припустивши, що ε_2 спрямовано проти ходу годинникової стрілки. Зображуємо цей вектор перпендикулярно AB у відповідний бік.

Отже, з величин, що входять для $\bar{a}_B$, невідомі тільки числові значення двох величин a_B і a^{τ}_{BA}. Їх можна знайти, спроектувавши векторне рівняння на будь-які дві осі.

Щоб визначити a_B, спроектуємо спочатку обидві частини рівняння на вісь Bx:

$$a_B \cos\beta = -|a_{A\tau}|\cos\gamma + a_{An}\sin\gamma + a^{n}_{BA}.$$

Підставивши у рівняння числові значення усіх величи, знайдемо a_B = -1,34 м/с^2. Оскільки $a_B < 0$, то, вектор $\bar{a}_B$ буде насправді спрямованим протилежно зображеному на рис. 3.13.

Визначаємо далі кутове прискорення стержня *2*. Щоб знайти ε_2, варто спочатку визначити a^{τ}_{BA}. Для цього обидві частини рівняння спроектуємо на напрям вісь $B\xi$:

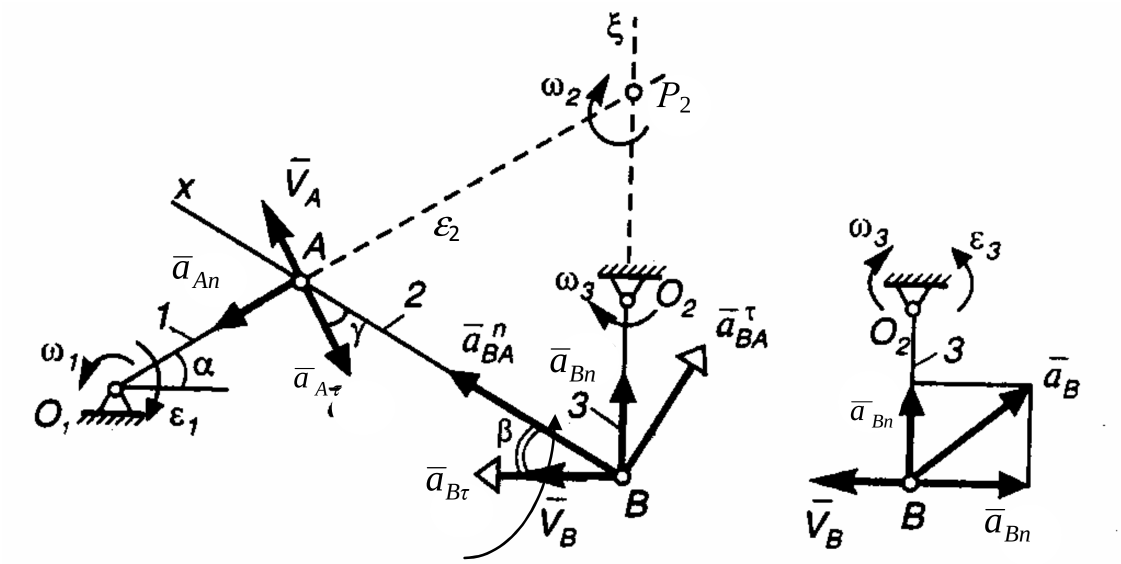
$$0 = -\left|a_A^\tau\right|\cos\alpha - a_A^n \sin\alpha + a_{BA}^\tau \cos\beta + a_{BA}^n \sin\beta \,.$$

Підставивши в рівняння числові значення усіх величин, знайдемо a_{BA}^τ = 2,43 м/с^2. Оскільки одержали a_{BA}^τ > 0, то дійсний напрям вектора $\bar{a}_{BA}^\tau$ збігається з тим, що передбачалося при розрахунку.

Тепер з рівності $a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$ одержимо $\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_2 = 0{,}61$ рад.с$^{-2}$. Напрям ε_2 буде проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на схемі.

Відповідь: V_B = 1 м/с, ω_2 = 0,25 рад.с$^{-1}$, a_B = -1,34 м/с^2 (знак указує, що напрям a_B насправді протилежний показаному на рис. 3.13), ε_2 = 0,61 рад.с$^{-2}$.

Задача 2. Механізм (рис. 3.14,а) складається із стержнів *1, 2, 3*, з'єднаних один з одним і з нерухомими опорами O_1 і O_2 шарнірами. Довжини стержнів l_1 = 2 м, l_2 = 4 м, l_3 = 1,25 м. У момент часу, коли $\alpha = \beta = 30^0$, і $\angle O_1AB$ = 120^0, для стержня *1* відомі величини і напрями кутової швидкості і кутового прискорення: $\omega_1 = 0{,}5$ рад.с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 1$ рад.с$^{-2}$. Для даного положення механізму визначити швидкість і прискорення точки *B*, кутові швидкості та кутові прискорення стержнів *2* і *3*.



а) б)

Рис. 3.14

Розв'язання. Визначення $\bar{V}_B$ і ω_2 цілком збігаються з тим, що виконано при розв'язанні задачі 1:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 1 \text{ м/с}, \; \gamma = 30^0, \; \omega_2 = V_A / P_2A = 0{,}25 \text{ рад.с}^{-1},$$

$$V_B = \omega_2 \cdot P_2B = 1 \text{ м/с}.$$

Оскільки стержень *3* здійснює обертальний рух навколо осі O_2, то

$$\omega_3 = V_B / l_3 = 0{,}8 \text{ рад.с}^{-1}.$$

Визначаємо прискорення точки *B*. Точка *B* рухається по колу радіуса O_2B, тому напрям прискорення $\bar{a}_B$ заздалегідь невідомий.

У цьому випадку вектор $\bar{a}_B$ варто представити як суму двох його складових $\bar{a}_{B\tau}$ і $\bar{a}_{Bn}$. Прийнявши для стержня 2 точку *A* за полюс, одержимо

$$\bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn} = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An} + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}.$$

Для векторів, зазначених у правій частині цього рівняння отримаємо

$$a_{A\tau} = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2 \text{ м/с}^2; \qquad a_{An} = \omega_1^2 \cdot l_1 = 1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^{n} = \omega_2^2 \cdot l_2 = 0{,}25 \text{ м/с}^2,$$

напрями цих векторів показано на рис. 3.14, а.

Вектори лівої частини рівняння визначаються для точки *B*, яка належить стержню *3*, що робить обертальний рух навколо точку O_2. Вектор $\bar{a}_{Bn}$ буде спрямований уздовж BO_2 від точки *B* до точки O_2 і чисельно

$$a_{Bn} = V_B^2 / l_3 = \omega_3^2 l_3 = 0{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Невідомий вектор $\bar{a}_{B\tau}$ направимо перпендикулярно стержню 3 у бік, за ходом годинникової стрілки.

Отже, з величин, що входять у векторне рівняння, невідомі тільки числові значення $a_{B\tau}$ і a_{BA}^{τ}, які можна знайти, спроектувавши обидві частини рівняння на вісь *Bx*:

$$a_{B\tau}\cos\beta + a_{Bn}\sin\beta = -a_{A\tau}\cos\gamma + a_{An}\sin\gamma + a_{BA}^{n}.$$

Підставивши числові значення усіх величин, знайдемо $a_{B\tau}$ = -1,8 м/с^2. Знак мінус указує, що напрям $\bar{a}_{B\tau}$ в дійсності є протилежним зображеному на рис. 3.14,а.

Тепер обчислюємо величину прискорення

$$a_B = \sqrt{(a_{B\tau})^2 + (a_{Bn})^2} = 1{,}97 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо кутове прискорення стержня *2*, спроектувавши обидві частини рівняння на напрям осі $B\xi$ одержимо

$$a_{Bn} = -a_{A\tau}\cos\alpha - a_{An}\sin\alpha + a_{BA}^{n}\sin\beta + a_{BA}^{\tau}\cos\beta.$$

Підставивши числові значення величин, знайдемо a_{BA}^{τ} = 3,36 м/с^2. Оскільки a_{BA}^{τ} > *O*, то фактично вектор $\bar{a}_{BA}^{\tau}$ спрямований, як показано на рис. 3.14,а.

Тепер, користуючись формулою $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_2 l_2$, одержимо $\varepsilon_2 = a_{BA}^{\tau} / l_2 = 0{,}84$ рад.с$^{-2}$, напрям ε_2 – проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на рис. 3.14,а.

Визначаємо кутове прискорення стержня *3*. Стержень *3* (рис. 3.14,б) здійснює обертальний рух навколо точки O_2. З рівняння $a_{B\tau} = \varepsilon_3 l_3$ одержимо $\varepsilon_3 = \left|a_B^\tau\right| / l_3 = 1{,}44$ рад·с$^{-2}$, напрям ε_3 – проти ходу годинникової стрілки. Показуємо його на рис. 3.14,б.

Відповідь: V_B = 1 м/с, ω_2 = 0,25 рад.с$^{-1}$, ω_3 = 0,8 рад.с$^{-1}$, a_B = 1,97 м/с^2, ε_2 = 0,84 рад.с$^{-2}$, ε_3 = 1,44 рад.с$^{-2}$.

3.6. Питання для самостійної роботи

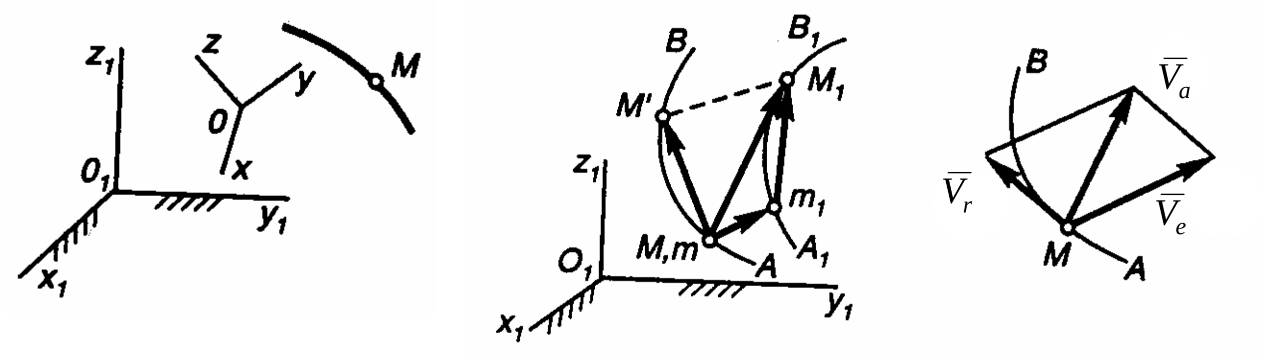
1. З яких рухів складається плоскопаралельний рух твердого тіла?
2. Що є основними кінематичними характеристиками плоскопаралельного руху твердого тіла?
3. Які кінематичні характеристики плоскопаралельного руху твердого тіла залежать / не залежать від вибору полюса?
4. Що називається миттєвим центром швидкостей?
5. Як розподілені швидкості точок плоскої фігури відносно МЦШ?
6. Скільки миттєвих центрів швидкостей може мати плоска фігура у певний момент часу?
7. Чи можлива ситуація, коли плоска фігура не має у певний момент часу миттєвого центра швидкостей?
8. Як можна побудувати миттєвий центр швидкостей у загальному випадку. Яка інформація потрібна для цієї побудови?
9. У якому випадку рух плоскої фігури називають миттєво поступальним?
10. Де знаходиться МЦШ для колеса, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні?
11. Як визначається швидкість точки плоскої фігури?
12. Як визначається прискорення точки плоскої фігури?

4. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

4.1. Відносний, переносний і абсолютний рухи

До цього часу ми вивчали рух точок тіла відносно однієї системи відліку. Але рух об'єкта може розглядатися одночасно відносно двох систем відліку, одна з яких (основна) приймається за нерухому, а інша рухається відносно першої. Рух точки тіла, досліджуваний одночасно відносно до основної (нерухомої) і рухомої систем відліку, називають *складним*.

Розглянемо точку M (рис. 4.1,а), що рухається відносно рухомої системи координат $Oxyz$, яка в свою чергу, рухається відносно системи координат $O_1x_1y_1z_1$ (основна, нерухома).



а) б) в)

Рис. 4.1

Введемо наступні визначення.

Рух точки відносно рухомої системи відліку (до осей $Oxyz$) називається *відносним*. Траєкторія, що описується точкою у відносному русі, називається відносною траєкторією. Кінематичні характеристики цього руху називаються відповідно відносною швидкістю ($\overline{V}_r$) і відносним прискоренням ($\overline{a}_r$).

Рух рухомої системи координат $Oxyz$ і незмінно зв'язаними з нею точками простору відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$, називається *переносним рухом*. Переносною швидкістю точки M ($\overline{V}_e$) називається швидкість тієї точки простору, незмінно зв'язаною з рухомою системою кординат $Oxyz$, через яку в даний момент часу проходить точка M, що рухається. Аналогічно визначається і переносне прискорення точки M ($\overline{a}_e$).

Рух точки M відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ називається *абсолютним* або *складним*. Траєкторія цього руху називається абсолютною. Кінематичні характеристики цього руху будуть називатися відповідно абсолютною швидкістю ($\overline{V}_a$) й абсолютним прискоренням ($\overline{a}_a$).

Розглянемо рух пасажира (умовно прийнятого як точку M) по вагону трамваю, що рухається. Рух пасажира відносно вагона трамвая (з корпусом вагоном трамвая зв'язуємо відносну систему координат $Oxyz$) буде відносним.

Рух вагона трамвая відносно колеї (з колією зв'язуємо нерухому систему координат $O_1x_1y_1z_1$) для пасажира є переносним.

Рух пасажира (точки M) відносно колеї (до системи координат $O_1x_1y_1z_1$) буде абсолютним.

4.2. Теорема про додавання швидкостей

Нехай точка M рухається уздовж кривої AB, яка в свою чергу рухається відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 4.1,б). Рух точки M будемо розглядати як складний, що складається з відносного руху уздовж кривої AB й переносного руху – руху кривої AB відносно системи координат $O_1x_1y_1z_1$. На рис. 4.1,б крива AB і точка M на ній відповідають моменту часу t, а крива A_1B_1 і точка M_1 на ній відповідають моменту часу t_1, причому $t_1 = t + \Delta t$.

Точка M за проміжок часу Δt зробить абсолютне переміщення $\overline{MM_1}$. Переносним переміщенням для точки M буде переміщення сумісно з кривою AB, тобто вектор $\overline{mm_1} = \overline{Mm_1}$. Відносним переміщенням точки M є переміщення уздовж траєкторії AB. Воно визначається на кривій AB вектором $\overline{MM'}$, а на кривій A_1B_1 вектором $\overline{m_1M_1}$, причому $\left|\overline{MM'}\right| = \left|\overline{m_1M_1}\right|$.

З векторного трикутника Mm_1M_1 маємо $\overline{MM_1} = \overline{Mm_1} + \overline{m_1M_1}$.

Поділяючи обидві частини цього рівняння на Δt і переходячи до границі, одержимо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\overline{MM_1}/\Delta t\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\overline{Mm_1}/\Delta t\right) + \lim_{\Delta t\to 0}\left(\overline{m_1M_1}/\Delta t\right).$$

За визначенням

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\overline{MM_1}/\Delta t\right) = \overline{V}_a, \quad \lim_{\Delta t\to 0}\left(\overline{Mm_1}/\Delta t\right) = \overline{V}_e.$$

При $\Delta t \to 0$ крива A_1B_1 прагне збігтися з кривою AB, а $\overline{MM'}$ – збігтися з $\overline{m_1M_1}$ і тому

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\overline{m_1M_1}/\Delta t\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\overline{MM'}/\Delta t\right) = \overline{V}_r.$$

У результаті знаходимо, що

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e. \tag{4.1}$$

Ця рівність виражає теорему про додавання швидкостей: *при складному русі абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі відносної та переносної швидкостей.*

Вектор $\overline{V}_a$ визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\overline{V}_r$ і $\overline{V}_e$ як на сторонах (рис. 4.1,в).

Модуль абсолютної швидкості

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos\left(\overline{V}_r \overline{V}_e\right)}.$$

Для випадку, коли відносний рух точки M визначають в координатній формі, тобто розглядають її відносний рух у рухомій системі координат $Oxyz$ (рис. 4.2), яка одночасно рухається поступально сумісно з полюсом O і обертально навколо його, матимемо у нерухомій системі координат $O_1x_1y_1z_1$:

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{\rho}.$$

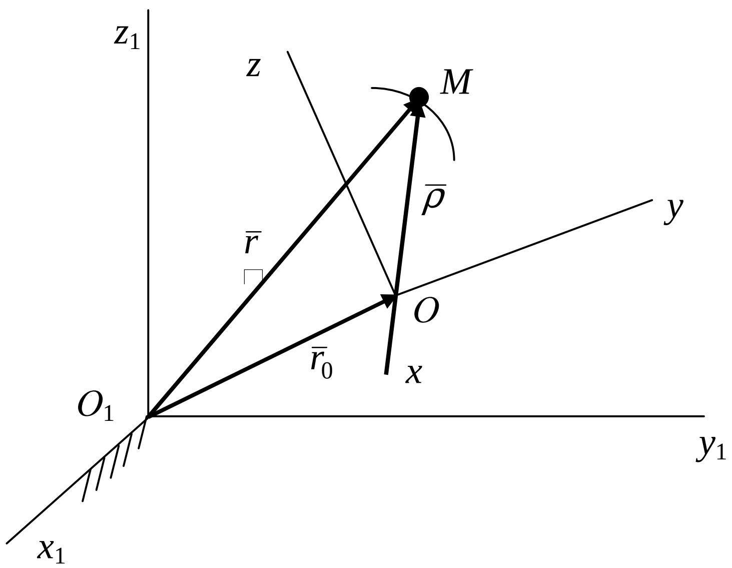


Рис. 4.2

Її абсолютна швидкість

$$\overline{V}_a = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}_0}{dt} + \frac{d\overline{\rho}}{dt} = \overline{V}_0 + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} + \frac{d\overline{\rho}}{dt} = \overline{V}_0 + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} + \overline{V}_r = \overline{V}_r + \overline{V}_e, \quad (4.2)$$

де $\overline{V}_0 = \dot{\overline{r}}_0 -$ швидкість полюса O в нерухомій системі координат; $\overline{V}_e = \overline{V}_0 + \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} -$ переносна швидкість точки M; $\dfrac{d\overline{\rho}}{dt} = \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} + \dfrac{d\rho}{dt} -$ абсолютна похідна вектора $\overline{\rho}$ за часом; $\overline{\omega}_e -$ кутова швидкість обертання простору рухомої системи координат, як твердого тіла (переносна кутова швидкість), навколо нерухомої; $\dfrac{d\overline{\rho}}{dt} -$ відносна похідна радіуса-вектора $\overline{\rho}$; $\overline{V}_r = \dfrac{d\overline{\rho}}{dt} -$ відносна швидкість точки.

4.3. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса)

Абсолютне прискорення точки при складному русі визначимо, продиференціювавши рівність (4.2) за часом, тобто

$$\overline{a}_a = \frac{d\overline{V}_a}{dt} = \frac{d\overline{V}_0}{dt} + \frac{d\overline{\omega}_e}{dt} \times \overline{\rho} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{\rho}}{dt} + \frac{d\overline{V}_r}{dt}. \qquad (4.3)$$

Доданок $\dot{\overline{V}}_r$ знайдемо згідно з правилом визначення абсолютної похідної вектора $\overline{V}_r$ за часом:

$$\frac{d\overline{V}_r}{dt} = \overline{\omega}_e \times \overline{V}_r + \frac{d\overline{V}_r}{dt} = \overline{\omega}_e \times \overline{V}_r + \overline{a}_r ,$$

де $\overline{a}_r = \dfrac{d\overline{V}_r}{dt} -$ відносне прискорення точки. Тоді (4.3) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \overline{a}_a &= \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_e \left(\overline{\omega}_e \times \overline{\rho} + \overline{V}_r \right) + \overline{\omega}_e \times \overline{V}_r + \overline{a}_r = \\ &= \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_e \times \overline{V}_r + \overline{\omega}_e \times \overline{V}_r + \overline{a}_r , \end{aligned} \qquad (4.4)$$

де $\overline{a}_0 = \dfrac{d\overline{V}_0}{dt}$ – прискорення полюса O в нерухомій системі координат; $\overline{\varepsilon}_e = \dfrac{d\overline{\omega}_e}{dt} -$ кутове прискорення рухомої системи координат.

Введемо позначення

$$\overline{a}_e = \overline{a}_0 + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{\rho} + \overline{\omega}_e \cdot \overline{\omega}_e \times \overline{\rho} , \quad \overline{a}_c = 2\overline{\omega}_e \overline{V}_r , \qquad (4.5)$$

де $\overline{a}_e , \overline{a}_c$ – переносне і коріолісове прискорення точки.

Підставивши (4.5) в (4.4) одержимо

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c . \qquad (4.6)$$

Рівняння (4.6) виражає теорему про додавання прискорень (теорема Коріоліса): *при складному русі прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного та коріолісового прискорень.*

Коріолісове прискорення дорівнює подвоєному векторному добутку переносної кутової швидкості (рухомої системи координат) на відносну швидкість точки:

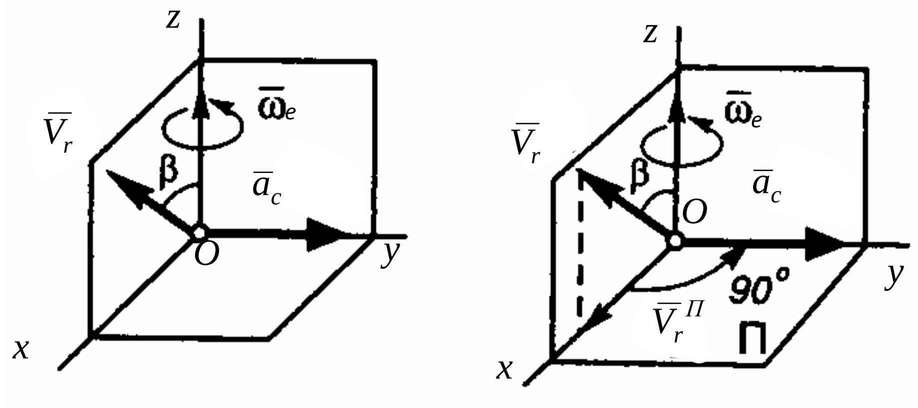
$$\overline{a}_c = 2 \left(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r \right). \qquad (4.7)$$

Модуль коріолісового прискорення, якщо кут між векторами $\overline{\omega}_e$ і $\overline{V}_r$ позначити через β, буде дорівнювати:

$$a_c = 2 \left| \omega_e \right| \cdot \left| V_r \right| \sin\beta . \qquad (4.8)$$

Напрям вектора $\overline{a}_c$ визначається відповідно до загального правила векторного добутку, тобто вектор $\overline{a}_c$ спрямований завжди по перпендикуляру до площини, що проходить через вектори $\overline{\omega}_e$ й $\overline{V}_r$ у той бік, відкіля обертання вектора $\overline{\omega}_e$ до вектора $\overline{V}_r$ видно проти ходу годинникової стрілки (рис. 4.3, а).

Для визначення напряму $\bar{a}_c$ точки зручно користатися правилом Жуковського: щоб знайти напрям коріолісового прискорення, варто спроектувати вектор відносної швидкості точки $\bar{V}_r$ на площину П, перпендикулярну вектору переносної кутової швидкості $\bar{\omega}_e$ (рис. 4.3,б), і повернути цю проекцію $\bar{V}_r^{\,П}$ в цій же площині на кут 90^0 у бік переносного обертання точки (тобто по напряму дугової стрілки $\bar{\omega}_e$).



а) б)

Рис. 4.3

З формули (4.8) слід, що $a_c = 0$ в наступних випадках:

1) коли $\omega_e = 0$, тобто коли переносний рух є поступальним або якщо переносна кутова швидкість точки у даний момент часу дорівнює нулю;

2) коли $V_r = 0$, тобто у випадку відносного спокою точки або в ті моменти часу, коли відносна швидкість точки дорівнює нулю;

3) коли $\sin\beta = 0$ (отже, коли кут $\beta = 0$ або кут $\beta = 180^0$), що відбудеться, коли вектор $\bar{V}_r$ паралельний осі переносного обертання точки ($\bar{V}_r \,//\, \bar{\omega}_e$).

Помітимо, що при розв'язанні задач на складний рух точки рівняння (4.6) зручно представити у вигляді:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^{n} + \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n} + \bar{a}_c\,. \qquad (4.9)$$

Зазначимо також, що при вивченні відносного руху і визначенні його відповідних кінематичних характеристик точки ($\bar{V}_r$, $\bar{a}_r$) можна уявно зупиняти переносний рух. Аналогічно, при вивченні переносного руху і визначенні відповідних кінематичних характеристик точки ($\bar{V}_e$, $\bar{a}_e$) можна уявно зупиняти відносний рух і розглядати тільки той рух точки, який вона здійснювала б разом з рухомою системою відліку. Що стосується коріолісового прискорення, то воно враховує взаємний вплив кожної з складових руху на абсолютний рух точки.

4.4. Приклади розв'язання задач по визначенню швидкості точки

Задача 1. Точка *M* рухається по боковій грані призми уздовж прямої *AB* зі швидкістю $\bar{u}$ (рис. 4.4), а сама призма рухається прямолінійно по горизонтальній нерухомій площині за законом $x_1 = (2 + t^2)$ м. Визначити швидкість точки *M* щодо нерухомої площини в момент часу t_1 = 1 с, якщо задано u = 3 м/с; $\alpha = 30^0$.

Розв'язання. Розглянемо рух точки *M* щодо нерухомої горизонтальної площини як складний, вважаючи її рух уздовж призми відносним, а рух призми сумісно з точкою *M* – переносним рухом. Оскільки призма рухається поступально, то переносі швидкості всіх її точок будуть рівні $\bar{V}_e$, причому $\bar{V}_e = \dot{x}_1 = 4t^3$ і при $t_1 = 1$ с $V_e = 4$ м/с.

Будуючи на векторах $\bar{V}_r$ та $\bar{V}_e$ паралелограм (рис. 4.4), знайдемо абсолютну швидкість точки *M* (відносно нерухомої системи координат $O_1x_1y_1$). За модулем

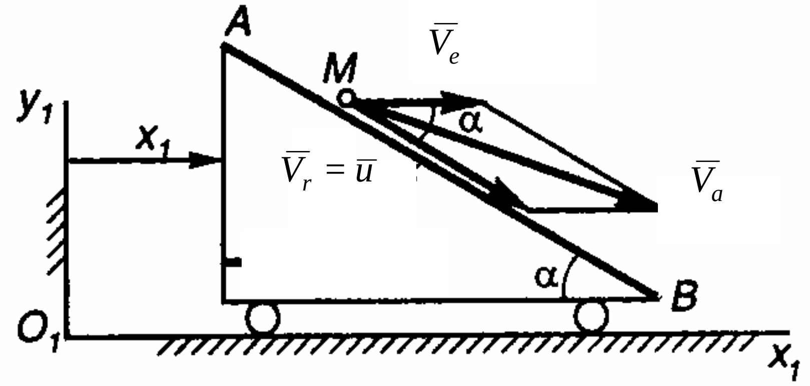


Рис. 4.4

$$V_a = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 30^0} = 6{,}77 \text{ м/с}.$$

Відповідь: $V_a = 6{,}77$ м/с.

4.5. Приклади розв'язання задач по визначенню прискорення точки

Задача 1. Візок (рис. 4.5,а) рухається прямолінійно по горизонтальній площині за законом $x_1 = (t^2 - t)$ см. У точці *A* до візка шарнірно прикріплений стержень *AB* (*AB* = *l* = 36 см), який при русі візка одночасно повертається у вертикальній площині за законом $\varphi = (\pi/12)(3t - 0{,}5t^2)$. Знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки *B* стержня в момент часу t_1 = 2 с.

Розв'язання. Розглянемо рух точки B як складний. Поступальний рух візка приймаємо за переносний рух. Рух точки B відносно візка (рух по дузі кола при обертанні стержня AB навколо осі A) буде відносним.

Визначимо положення точки B в заданий момент часу. Приймаючи в рівнянні $\varphi = f(t)$ час $t = t_1 = 2$ с, одержимо

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{12}\left(3\cdot 2 - 0{,}5\cdot 2^2\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Це положення стержня показано на рис. 4.5,б.

Абсолютна швидкість знайдеться за формулою

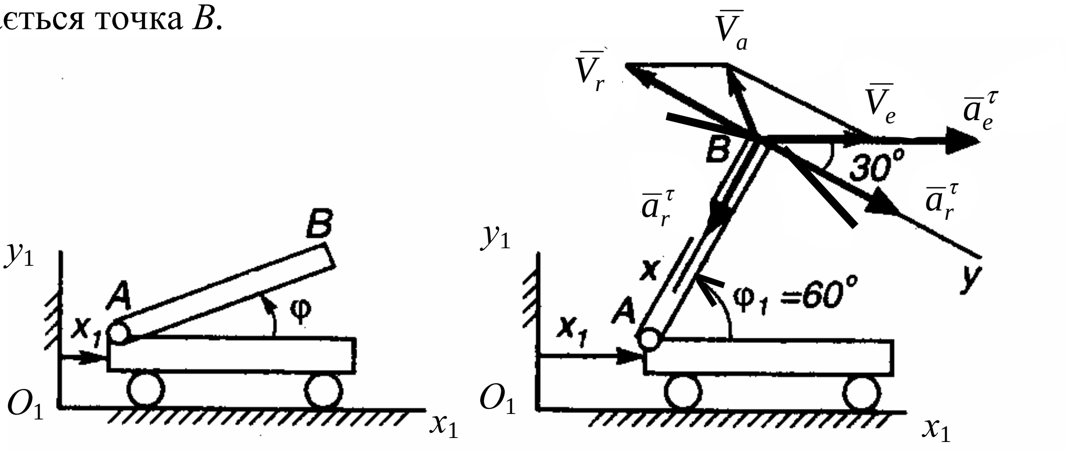
$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e .$$

Визначаємо відносну швидкість точки B стержня:

$$V_r = \dot{\varphi} l = \frac{\pi l}{12}(3 - t).$$

Для моменту часу t_1 = 2 с, V_r = 9,42 см/с; вектор $\overline{V}_r$ перпендикулярний стержню AB і оскільки $V_r > 0$, то вектор $\overline{V}_r$ спрямований у бік зростання кута φ.

Переносною швидкістю для точки B буде швидкість тієї точки простору, незмінно зв'язаного з візком, з якою у даний момент часу збігається точка B.



а) б)

Рис. 4.5

Визначаємо переносну швидкість

$$V_e = \dot{x}_1 = 2t - 1.$$

Для моменту часу t_1 = 2 с V_e = 3 см/с і оскільки V_e > 0, то вектор $\overline{V}_{e1}$ спрямований у бік зростання відліку x_1.

Тепер для положення механічної системи в момент часу t_1 = 2 с (рис. 4.5,б) будуємо на векторах $\overline{V}_r$ та $\overline{V}_e$ паралелограм і, визначивши, що кут між цими векторами дорівнює 150^0, знаходимо абсолютну швидкість точки B:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos150^0} = \sqrt{9{,}42^2 + 3^2 - 2\cdot 9{,}42\cdot 3(-0{,}867)} = 6{,}98 \text{ см/с.}$$

Абсолютне прискорення точки B визначимо за формулою (4.9):

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n + \overline{a}_c .$$

Знаходимо числові значення характеристик відносного руху точки B: $a_r^\tau = \dot{v}_r = \ddot{\varphi}l = -\dfrac{\pi l}{12}$, $a_r^n = V_r^2/l$; для моменту часу t_1 = 2с одержимо $a_r^\tau = -9{,}42$ см/с^2, $a_r^n = 2{,}46$ см/с^2. Оскільки $a_r^\tau < 0$, то вектор $\overline{a}_r^\tau$ спрямований перпендикулярно AB у бік, протилежний додатному відліку кута φ; вектор $\overline{a}_r^n$ спрямований по стержню до точки A (рис. 4.5,б).

Визначаємо числові значення характеристик переносного руху: $a_e^\tau = \ddot{x}_1 = 2$ см/с^2 (знак показує, що вектор $\overline{a}_{\text{пер}}^\tau$ спрямований у бік додатного відліку відстані x_1); $a_e^n = 0$, оскільки переносний рух (рух стержня сумісно з візком) прямолінійний. Отже, у даному випадку $\overline{a}_e = \overline{a}_e^\tau$ (рис. 4.5, б).

Оскільки переносний рух у даному випадку є поступальним, то $\omega_e = 0$ і, отже, $\overline{a}_c = 0$.

У підсумку абсолютне прискорення точки M матиме вигляд

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_e^\tau .$$

Для визначення модуля $\overline{a}_a$ побудуємо систему координат Bxy (рис. 4.5, б) і спроектуємо обидві частини рівняння на ці осі. Одержимо:

$$a_{ax} = a_r^n - \overline{a}_e\sin30^0 = 1{,}46 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{ay} = a_r^\tau + a_e^\tau\cos30^0 = 9{,}42 + 2\cdot 0{,}867 = 11{,}15 \text{ см/с}^2.$$

Тоді

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{1{,}46^2 + 11{,}15^2} = 11{,}25 \text{ см/с}^2.$$

Відповідь: абсолютна швидкість і прискорення точки B: $V_a =$ 6,98 см/с, $a_a = 11{,}25$ см/с^2.

Задача 2. Прямокутна пластинка $ABDE$ (рис. 4.6) обертається навколо нерухомої осі O_1z_1 за законом $\varphi = 4t^2 - 2t^3$.

По пластинці уздовж прямої AD, яка утворює з віссю обертання кут $\alpha = 30^0$, рухається точка M за законом $s = AM = 3\left[1-\sin(\pi t/6)\right]$ м. Знайти абсолютну швидкість та абсолютне прискорення точки M в момент часу t_1 = 1 с для положення пластини на рис. 4.6, коли її сторона AB паралельна осі O_1x.

Розв'язання. Розглянемо рух точки M як складний, вважаючи обертання пластини навколо осі O_1z_1 переносним рухом, а рух точки M по пластині уздовж прямої AD відносним рухом.

Визначимо положення точки M в момент часу t_1. З рівняння відносного руху одержимо $s_1 = 3[1-\sin(\pi/6)] = 3\cdot[1-0{,}5]$ = 1,5 м. Зображуємо на кресленні точку M_1, відкладаючи відстань $AM_1 = s_1$. Точку M_1 на пластині приймаємо як полюс рухомої системи координат M_1xyz, осі якої відповідно до умови задачі є паралельними відповідним осям системи координат $O_1x_1y_1z_1$.

Абсолютна швидкість точки M знайдеться за формулою (4.1):

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e \,. \tag{4.2}$$

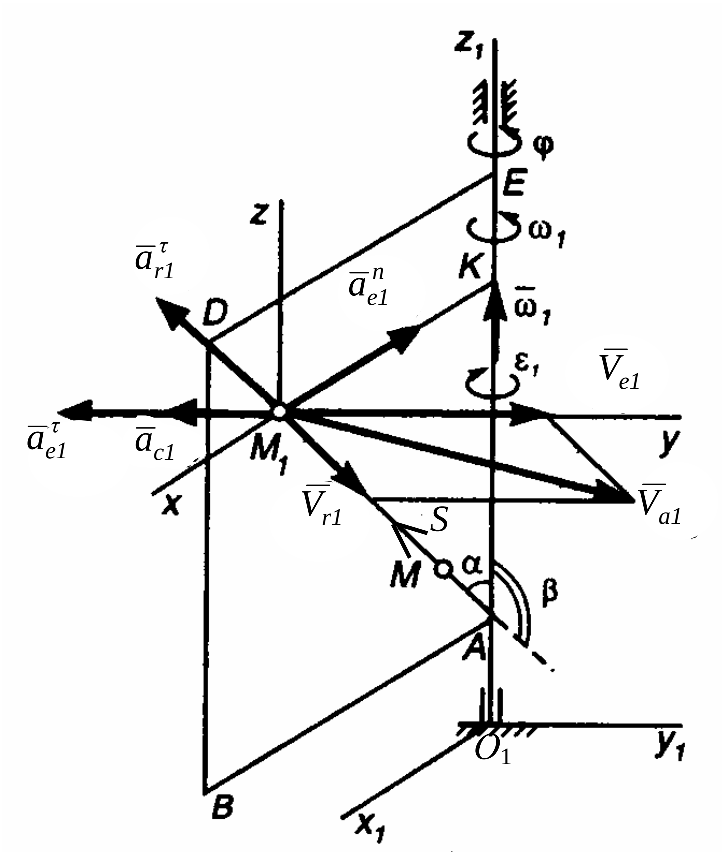


Рис. 4.6

Визначаємо відносну швидкість точки M

$$V_r = \dot{s} = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right).$$

Для моменту часу t_1 = 1 с, $\overline{V}_{r1}$ = −1,36 м/с. Оскільки $\overline{V}_{r1} < 0$, то вектор $\overline{V}_{r1}$ спрямований у бік, протилежний позитивному відліку відстані s, належить прямій AD, а також площині xM_1z.

Переносною швидкістю точки M в момент часу t_1 буде швидкість точки пластини при її обертанні навколо осі z_1 з якою в момент часу t_1 співпадає точка M:

$$V_{e1} = \omega_1 h_1 \,,$$

де $\omega_1 -$ кутова швидкість пластини при $t = t_1$, $h_1 = M_1K -$ відстань від точки M_1 до осі обертання пластинки.

Знаходимо $\omega = \dot{\varphi} = 8t - 6t^2$ і при t_1 = 1 с, $\omega_1 = 2$ рад.с$^{-1}$. Оскільки $\omega_1 > 0$, то дугова стрілка ω_1 збігається з напрямом додатного відліку кута φ. Визначаємо $h_1 = s_1 \sin\alpha = 1{,}5 \cdot \sin 30^0 = 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$ м.

Далі знаходимо $V_{e1} = 2 \cdot 0{,}75 =$ 1,5 м/с. Вектор $\overline{V}_{e1}$ буде спрямований перпендикулярно площині пластини у бік її обертання, тобто у бік дугової стрілки ω_1 (рис. 4.6), і лежати на осі $M_1 y$.

Знаходимо $\overline{V}_{a1}$ відповідно до формули (4.2) і, враховуючи, що в даному випадку $\overline{V}_{r1}$ та $\overline{V}_{e1}$ взаємно перпендикулярні, у момент часу t_1 = 1 с, одержимо

$$V_{a1} = \sqrt{V_{r1}^2 + V_{e1}^2} = \sqrt{(-1{,}36)^2 + 1{,}5^2} = 2{,}02 \text{ м/с.}$$

Зображуємо вектор $\overline{V}_{a1}$ на схемі руху пластинки (рис. 4.6).

Абсолютне прискорення точки M визначимо за формулою (4.9):

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n + \overline{a}_c .$$

Визначаємо числове значення і напрям кожного вектора, зазначеного в правій частині цього рівняння.

Знаходимо спочатку характеристики відносного руху точки M: $a_r^\tau = \dot{V}_r = \dfrac{\pi^2}{12}\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$ і при t_1 = 1 с, $a_{r1}^\tau = 0{,}41$ м/с^2 (вектор $\overline{a}_r^\tau$ лежить на прямій AD і спрямований у бік додатного відліку відстані s); $a_r^n = V_r^2/\rho_r = 0$ (тут $\rho = \infty$, оскільки траєкторія відносного руху точки M прямолінійна).

Переходимо до визначення переносних складових прискорення. Переносним рухом для точки M є обертання пластини, її кінематичні характеристики в момент часу t_1: $\omega_{e1} = 2$ рад.с$^{-1}$, а $\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 8 - 12t$ і при $t_1 = 1$с, $\varepsilon_{e1} = -4$ рад.с$^{-2}$ (знак указує, що ε_1 протилежно напряму додатного відліку кута φ).

Тоді $a_{e1}^\tau = |\varepsilon_{e1}| h_1 = |-4| \cdot 0{,}75 =$ 3 м/с^2, $a_{e1}^\tau = \omega_{e1}^2 h_1 = 2^2 \cdot 0{,}75 = 3$ м/с^2. Вектор $\overline{a}_{e1}^\tau$, спрямований перпендикулярно площині пластини у бік дугової стрілки ε_1, лежить на осі $M_1 y$, вектор $\overline{a}_{e1}^n$ спрямований від точки M_1 до осі її обертання $O_1 z_1$ і лежить на осі $M_1 x$.

Визначаємо коріолісове прискорення. Модуль його знаходимо за формулою

$$a_{c1} = 2|\omega_1| \cdot |V_{r1}| \sin\beta ,$$

де $\beta -$ кут між векторами $\overline{\omega}_{e1}$ і $\overline{V}_{r1}$. У нашому випадку $\beta = 150^0$ (рис. 4.6), і, підставивши значення величин у формулу, одержимо $a_{c1} = 2 \cdot 2 \cdot |-1{,}36| \cdot 0{,}5 =$ 2,72 м/с^2.

Напрям $\overline{a}_{c1}$ знайдемо за правилом Жуковського: спроектуємо вектор $\overline{V}_{r1}$ на площину xM_1y, перпендикулярну осі O_1z_1 обертання пластини (ця проекція вектора $\overline{V}_{r1}$ буде спрямована так само, як і вектор $\overline{a}_{e1}^n$), і потім повернемо цю проекцію у бік переносного обертання (тобто за напрямом дугової стрілки ω_1) на 90^0.

Для визначення модуля вектора абсолютного прискорення спроектуємо на осі системи координат M_1xyz обидві частини векторного рівняння для $\overline{a}_a$. Одержимо

$$a_{ax} = a_{r1}^{\tau}\sin 30^0 - a_e^n = 0{,}41\cdot 0{,}5 - 3 = -2{,}8 \text{ м/с}^2;$$
$$a_{ay} = -a_{c1} - \left|a_{e1}^{\tau}\right| = -2{,}72 - 3 = -5{,}72 \text{ м/с}^2;$$
$$a_{az} = a_{r1}^{\tau}\cos 30^0 = 0{,}41\cdot 0{,}867 = 0{,}355 \text{ м/с}^2.$$

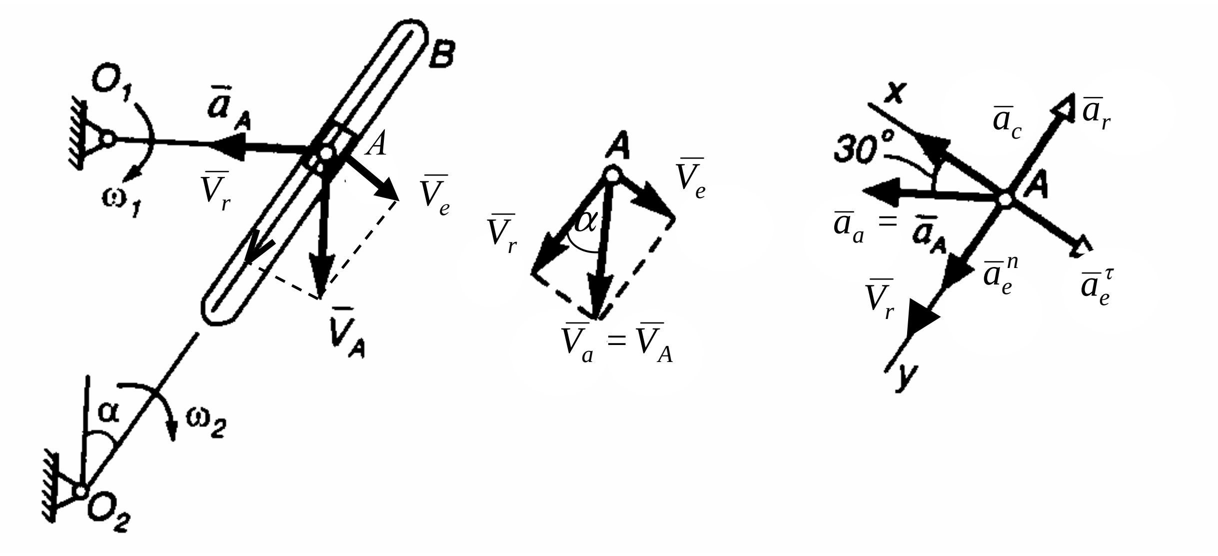
Тоді за величиною

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{(-2{,}8)^2 + (-5{,}72)^2 + 0{,}355^2} = 6{,}38 \text{ м/с}^2 -$$

Відповідь: абсолютна швидкість і прискорення точки M_1: $V_a =$ 2,02 м/с, $a_a = 6{,}38$ м/с^2.

Задача 3. Кривошип O_1A кривошипно-кулисного механізму (рис. 4.7, а) обертається навколо нерухомої точки O_1. Кінець A кривошипа з'єднаний шарнірно з повзуном, що переміщується в прорізі куліси O_2B и визиває її обертальний рух навколо нерухомої точки O_2.

Визначити для зображеного на рис. 4.7,а положення механізму кутову швидкість ω_2 і кутове прискорення ε_2 куліси, а також швидкість і прискорення повзуна A відносно куліси, якщо відомо, що кривошип довжиною $O_1A = l = 20$ см обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega_1 = 2$ рад.с$^{-1}$ і кут $\alpha = 30^0$.



а) б) в)

Рис. 4.7

Розв'язання. Визначаємо швидкість і прискорення точки A як такої, що належить кривошипу O_1A:

$$V_A = \omega_1 l = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с; } a_A^\tau = 0, \text{ оскільки } \omega_1 = const,$$

і отже, $$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l = 2^2 \cdot 20 = 80 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\overline{V}_A$ спрямований перпендикулярно O_1A у напрямі дугової стрілки ω_1, а вектор $\overline{a}_A = \overline{a}_A^n$ спрямований уздовж AO_1 (рис. 4.7, а) від точки A до точки O_1.

Розкладемо рух повзуна A на складові відносного і переносного рухів. Рух точки A по дузі кола з центром O_1 і радіусом O_1A є абсолютним. Однак цей рух можна представити як складний, прийнявши обертальний рух куліси BO_2 сумісно з повзуном за переносний рух, а рух повзуна уздовж прорізу куліси – за відносний.

Застосуємо далі для повзуна теорему про додавання швидкостей (рис. 4.7,б): $$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e.$$

Тут відносна швидкість $\overline{V}_r$ повзуна спрямована уздовж куліси, а переносна швидкість $\overline{V}_e$ – перпендикулярно кулісі BO_2 (як швидкість точки A тіла, що обертається сумісно з кулісою навколо точки O_2).

Тоді з прямокутника швидкостей (рис. 4.7,б) знайдемо

$$V_r = V_A \cos 30^0 = 40 \cdot 0{,}867 = 34{,}6 \text{ см/с; } V_e = V_A \sin 30^0 = 40 \cdot 0{,}5 = 20 \text{ см/с.}$$

Тепер з формули $V_e = \omega_2 \cdot O_2A$, обчисливши попередньо $O_2A = O_1A/\sin 30^0 = 20/0{,}5 = 40$ см, одержимо кутову швидкість куліси:

$$\omega_2 = V_e / O_2A = 20/40 = 0{,}5 \text{ рад.с}^{-1}.$$

Відповідно до напряму вектора $\overline{V}_e$ кутова швидкість ω_2 буде спрямована за ходом годинникової стрілки.

Визначимо $\overline{a}_r$ і ε_2. Для цього будуємо рухому систему координат Axy (рис. 4.7,в), вісь Ax якої спрямуємо перпендикулярно кулісі. Застосовуємо для повзуна теорему про додавання прискорень:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n + \overline{a}_c.$$

Абсолютне прискорення повзуна $\overline{a}_a = \overline{a}_A$ (рис. 4.7,а) нами вже визначено. Будуємо його на рис. 4.7,в. Розглянемо далі вектори правої частини цього рівняння.

Оскільки відносний рух точки A (уздовж куліси) прямолінійний, то для повзуна отримаємо $\overline{a}_r^n = 0$. Вектор $\overline{a}_r = \overline{a}_r^n$ направимо уздовж осі Ay, наприклад, у бік її від'ємного напряму, (рис. 4.7,в), його величина невідома.

Зображуємо далі на кресленні вектор $\overline{a}_e^\tau$, припускаючи, наприклад, що він спрямований у той же бік, що і $\overline{V}_e$. Вектор $\overline{a}_e^n$ спрямований уздовж AO_2, співпадає з віссю Ay і чисельно дорівнює $a_e^n = \omega_2^2 \cdot O_2A = 0{,}5^2 \cdot 40 =$ $= 40$ см/с^2.

Напрям вектора $\overline{a}_c$ коріолісового прискорення знайдемо за правилом Жуковського: оскільки вектор $\overline{V}_r$ вже лежить у площині, перпендикулярній осі обертання куліси, то повернемо його навколо точки A на 90^0 у напрямі дугової стрілки ω_2, тобто за ходом годинникової стрілки. Модуль коріолісового прискорення визначимо за формулою

$$a_c = 2\omega_2 V_r \sin 90^0 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 34{,}7 = 34{,}7 \text{ см/с}^2.$$

Отже, у величин, що входять у рівняння для $\overline{a}_a$, невідомі числові значення тільки прискорень a_r^τ і a_e^τ. Їх можна знайти, спроектувавши обидві частини рівняння для $\overline{a}_a$ на осі Ax і Ay.

Тоді одержимо відповідно $$\left.\begin{aligned} a_A \cos 30^0 &= a_c - a_e^\tau; \\ a_A \sin 30^0 &= a_e^n - a_r. \end{aligned}\right\}$$

Підставивши в рівняння числові значення величин, знайдемо a_r = -30 см/с^2, a_e^τ = -34,66 см/с^2. Знаки вказують, що дійсні напрями прискорень $\overline{a}_r$ і $\overline{a}_e^\tau$ протилежні зображеним на рис. 4.7, в.

Тепер з формули $a_e^\tau = \varepsilon_2 \cdot O_2 A$ визначимо кутове прискорення куліси

$$\varepsilon_2 = \left|a_e^\tau\right| / O_2 A = 0{,}867 \text{ рад.с}^{-2}.$$

Відповідь: Кутові швидкості і прискорення куліси, а також відносні швидкості і прискорення повзуна: ω_2 = 0,5 рад.с$^{-1}$, ε_2 = 0,867 рад.с$^{-2}$, V_r = 34,6 см/с, a_r = 30 см/с.

4.6. Питання для самостійної роботи

1. У якому випадку говорять про складний рух точки?
2. Як знайти абсолютну швидкість точки при її складному русі?
3. Як знайти абсолютне прискорення точки при її складному русі?
4. Як визначити і що характеризує відносне прискорення точки при її складному русі?
5. Як визначити і що характеризує переносне прискорення точки при її складному русі?
6. Як визначити і що характеризує коріолісове прискорення точки при її складному русі?
7. Як визначити напрям коріолісова прискорення за загальним правилом векторного добутку?
8. Як визначити напрям коріолісова прискорення за правилом Жуковського?
9. У яких випадках коріолісове прискорення дорівнює нулю?
10. Дайте визначення абсолютному, відносному та переносному рухам точки?
11. Як зв'язані між собою абсолютна і відносна похідні від вектора $\overline{\rho}$ за часом?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанилидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1984. – Т. 1. – 504 с.

2. Бугаєнко Г.О. Курс теоретичної механіки / Г.О. Бугаєнко. – К.: Вища школа, 1968. – 409 с.

3. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1985. – Т. 1. – 240 с.

4. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики / Н.Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1967. – Ч. 1. – 468 с.

5. Воронков И.М. Курс теоретической механики / И.М. Воронков. – М.: Наука, 1966. – 596 с.

6. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 300 с.

7. Гернет М.М. Курс теоретической механики / М.М. Гернет. – М: Высш. шк., 1981. – 303 с.

8. Глонь О.А. Основы теоретической механики / О.А. Глонь. – К.: ВКЦ «Софія», 1997. – 144 с.

9. Добронравов В.В.Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин, А.Л. Дворников. – М.: Высш. шк., 1974. – 528 с.

10. Кильчевский Н.А. Основы теоретической механики / Н.А. Кильчевский, Н.И. Ремизова, Е.Н. Кильчевская. – К.: Вища школа, 1986. – 296 с.

11. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики / Н.А. Кильчевский. – М.: Наука, 1977. – Т. 1. – 456 с.

12. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Наука, 1984. – Т. 1. – 352 с.

13. Павловский М.А. Теоретична механіка / М.А. Павловский. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.

14. Павловский М.А. Теоретическая механика / М.А. Павловский, Л.Ю. Акинфиева, О.Ф. Бойчук. – К.: Вища школа, 1985. – Ч. 1. – 351 с.

15. Попов М.В. Теоретическая механика / М.В. Попов. – М.: Наука, 1986. – 335 с.

16. Савин Г.Н. Курс теоретической механики / Г.Н. Савин, Т.В. Пу-тята, Б.Н. Фрадлин . – К.: Вища школа, 1973. – 359 с.

17. Старжинский В.М. Теоретическая механика / В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1980. – 464 с.

18. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высш. шк., 2001. – 416 с.

19. Романенко Л.Г. Теоретична механіка: навч. пос. для технічних вузів / Л.Г. Романенко, В.Г. Солодов. – Х.: ХДАДТУ, 2000. – 268 с.

20. Турбін Б.І. Теоретична механіка / Б.І. Турбін. – К.: Держсільгоспвидав. УРСР, 1962. – 373 с.

21. Теоретична механіка: навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей і завдання для контрольних робіт студентів факультету заочної освіти / В.П. Шпачук, М.С. Золотов, О.І. Рубаненко, А.О. Гарбуз. – Х.: ХДАМГ, 2007. – 134 с.

22. Яблонский А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Высш. шк., 1984. – Ч. 1. – 344 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ШПАЧУК Володимир Петрович
ЗОЛОТОВ Михайло Сергійович
РУБАНЕНКО Олександр Ігоревич
ГАРБУЗ Алла Олегівна

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА КІНЕМАТИКА

Конспект лекцій

(для студентів 1 і 2 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямами 6.060101 «Будівництво», 6.050702 «Електромеханіка», 6.050701 «Електротехніка та електротехнології», 6.060103 «Гідротехніка (водні ресурси)», 6.070101 «Транспортні технології (за видами транспорту)», 6.170202 «Охорона праці»)

Відповідальний за випуск *В. П. Шпачук*

За авторською редакцією

План 2012, поз. 69Л

Підп. до друку 17.10.2012р. Формат 60 х 84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 4,0
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011р.